

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Módosítsuk a síkon mint \mathbb{R} fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a, b) = (\lambda |a|, \lambda |b|)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjuk meg $\mathbb{R}[x]$ egy részhalmazát, mely \mathbb{Q} fölött kétdimenziós altér, de \mathbb{R} fölött nem altér.

13. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$ -ben egy négyelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan négy legyen lineárisan összefüggő.

14. Hány dimenziós $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -ban az az altér, amely azokból az M mátrixokból áll, melyekre $(0, 1, 0)M = (0, 0, 0)$?

15. Adjunk példát olyan $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ nem nulla mátrixokra, melyekre $r(M + N) = r(M) + r(N)$.

- 16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a D, L, S, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(D) A összegtartó.

(L) A skalárszorostartó.

(S) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v + w) = \quad \square$$

$$\lambda(A(v + w)) = \quad \square$$

$$\lambda(A(v) + A(w)) = \quad \square$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(A(w)) = \quad \square$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

18. Ha $A, B \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ rangja 1, akkor mik $\dim \text{Ker}(A + B)$ lehetséges értékei?

19. Ha $A^2 + A = 2I$, akkor mik A lehetséges sajátértékei?

20. Egy $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ -beli mátrix minimálpolinomja x^2 . Mik a rangjának a lehetséges értékei?

21. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^3 , akkor mi lehet $A + I$ minimálpolinomja?

22. Mi az yz -síkra való tükrözés determinánusa?

23. Ha $a^2 + b^2 = 1$ és $c^2 + d^2 = 2$, akkor maximum mennyi lehet $a + bc + d$ értéke?

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Minden $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ és $v \in \mathbb{C}^2$ esetén $Mv = \lambda v \Rightarrow M^*v = \bar{\lambda}v$.”

25. A $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix mikor diagonalizálható komplex felett ONB-ben?

26. Ha A unitér, akkor mik $\det(AA^*)$ lehetséges értékei?

27. Adjunk meg egy olyan ortogonális mátrixot, melyben a főátlóbeli elemek összege $\sqrt{3} + 1$.

28. Adjuk meg a síkon az $y = x$ egyenesre való függőleges vetítés egydimenziós invariáns altereit.

29. Adjuk meg a térben az $(1, 1, -1)$ és $(1, -1, 1)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix determinánusa pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit.”