

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Írjuk le képlettel, mit jelent az, hogy a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ generált altér a **legsűkebb** a v_1, \dots, v_n vektorokat tartalmazó altérek között. A generált altér elemeit megadó képletet nem kell leírni.

$$\text{Minden } W \text{ altérre } v_1, \dots, v_n \in W \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W.$$

2. Mondjuk ki az $U + W$ altér dimenzióját megadó képletet.

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

3. Definiáljuk **halmaz-jelöléssel** az $A \in \text{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés képterét.

$$\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}.$$

4. Definiáljuk a diagonalizálható transzformáció fogalmát.

Egy transzformáció akkor diagonalizálható, ha mátrixa alkalmas bázisban diagonális.

5. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$$f(A) = 0 \iff m_A \mid f, \text{ vagyis ezek az } f \text{ polinomok a minimálpolinom többszörösei.}$$

6. Mit jelent az, hogy két négyzetes mátrix hasonló?

Ugyanazon lineáris transzformáció mátrixai (csak esetleg más bázisban).

7. Mondjuk ki a V euklideszi tér v és w vektoraira a Cauchy-egyenlőtlenséget. Az egyenlőség esetét nem kell diszkutálni.

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

$$\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ minden } v \text{ és } w \text{ vektorra.}$$

9. Definiáljuk a B -ortogonális bázis fogalmát, ahol B bilineáris függvény.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j$ esetén $B(b_i, b_j) = 0$.

10. Definiáljuk a V és W alterek direkt összegének fogalmát. Mi ennek a jele?

A $V + W$ összeget direkt összegnek nevezzük, ha $V \cap W = \{0\}$, jele $V \oplus W$.