

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Módosítsuk a síkon mint \mathbb{R} fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a, b) = (|\lambda|a, |\lambda|b)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \lambda = 1, \mu = -1, v \neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

12. Adjuk meg \mathbb{C}^2 egy részhalmazát, mely \mathbb{R} fölött egydimenziós altér, de \mathbb{C} fölött nem altér.

Pl. azok a vektorok, melyeknek első komponense valós, a második nulla.

13. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$ -ben egy négyelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan kettő legyen lineárisan összefüggő.

Pl. $\{1, 2, x, 2x\}$.

14. Egy vektortérben van négyelemű független generátorrendszer, és kételemű, 1 rangú rendszer is. Mi lehet a dimenzió?

4.

15. Adjunk ellenpéldát az „ $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ esetén $r(M + N) = r(M) + r(N)$ ” állításra.

$$\text{Pl. } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, T, O, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.

(L) A vagy B skalárszoros-tartó.

(T) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(X) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(A + B))(v) = \boxed{\text{T}}$$

$$\lambda((A + B)(v)) = \boxed{\text{O}}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{X}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{\text{T}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \boxed{\text{O}}$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ -nek a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltère egydimenziós, akkor mennyi lehet $r(A - 2I)$? 3
19. Ha $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x + 1$ és $f(M)(v) = v$, akkor mi lehet M karakterisztikus polinomja? $x(x - r)$, $r \in \mathbb{R}$.
20. Egy $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ -beli mátrix minimálpolinomja $x^4(x^2 + 1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei? 5
21. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^7 , akkor mi lehet A^2 minimálpolinomja? x^4
22. Mi a z -tengely körüli 50 fokos forgatás determinánusa? 1
23. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2}$ mely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra teljesül? $a = b \geq 0$.
24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy valós mátrix komplex fölött diagonalizálható, de valós fölött nem, akkor normális.” Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
25. Az $\begin{pmatrix} a & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix mikor unitér? Ha $a = 0$.
26. Tegyük föl, hogy A önadjungált és invertálható, B unitér. Mivel egyenlő $B(AB)^*(BA)^{-1}$? $B^{-1} = B^*$.
27. Az $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonális mátrix főátlóbeli elemeinek összege -3 . Mennyi a determinánusa? -1 .
28. Adjunk meg egy olyan lineáris transzformációt a síkon, aminek csak a két triviális invariáns altere van.
- Pl. forgatás 73 fokkal az origó körül.
29. A térben $(0, 1, 0)$ sajátvektora A -nak. Adjuk meg A^* egy kétdimenziós invariáns alterét. Az xz -sík.
30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrixnak van pozitív és negatív eleme is, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak indefinit.” Pl. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.