NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a,b) = (|\lambda|\, a, |\lambda|\, b)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$ egy részhalmazát, mely $\mathbb{R}$ fölött egydimenziós altér, de $\mathbb{C}$ fölött nem altér.

13. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy négyelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan kettő legyen lineárisan összefüggő.

14. Egy vektortérben van négyelemű független generátorrendszer, és kételemű, 1 rangú rendszer is. Mi lehet a dimenzió?

15. Adjunk ellenpéldát az „$M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén $r(M+N) = r(M) + r(N)$" állításra.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, T, O, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.
(L) A vagy B skalárszoros-tartó.
(T) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \square$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)+B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \square$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$-nek a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltere egydimenziós, akkor mennyi lehet $r(A-2I)$?

19. Ha $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x+1$ és $f(M)(v) = v$, akkor mi lehet M karakterisztikus polinomja?

20. Egy $\mathbb{R}^{6\times 6}$-beli mátrix minimálpolinomja $x^4(x^2+1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

21. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^7, akkor mi lehet A^2 minimálpolinomja?

22. Mi a z-tengely körüli 50 fokos forgatás determinánsa?

23. $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}$ mely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy valós mátrix komplex fölött diagonalizálható, de valós fölött nem, akkor normális."

25. Az $\begin{pmatrix} a & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix mikor unitér?

26. Tegyük föl, hogy A önadjungált és invertálható, B unitér. Mivel egyenlő $B(AB)^*(BA)^{-1}$?

27. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix főátlóbeli elemeinek összege -3. Mennyi a determinánsa?

28. Adjunk meg egy olyan lineáris transzformációt a síkon, aminek csak a két triviális invariáns altere van.

29. A térben $(0, 1, 0)$ sajátvektora A-nak. Adjuk meg A^* egy kétdimenziós invariáns alterét.

30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrixnak van pozitív és negatív eleme is, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak indefinit."