Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2014. jún. 12.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk le képlettel, mit jelent az, hogy a $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ generált altér a **legszűkebb** a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokat tartalmazó alterek között. A generált altér elemeit megadó képletet nem kell leírni.

Minden W altérre $v_1, \ldots, v_n \in W \Rightarrow \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

2. Mit jelent az, hogy v lineárisan függ $v_1, \ldots, v_n$-től?

Azt, hogy $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, azaz v előáll $v_1, \ldots, v_n$ lineáris kombinációjaként.

3. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

4. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

5. Definiáljuk a bal oldali nullosztó fogalmát $\mathrm{Hom}(V)$-ben.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ bal oldali nullosztó, ha $A \neq 0$, és van olyan $0 \neq B \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $AB = 0$.

6. Definiáljuk az A lineáris leképezés rangját.

$r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

7. Mikor áll egy valós euklideszi tér u és w vektoraira felírt háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség? (Magát az egyenlőtlenséget nem kell felírni.)

Akkor és csak akkor, ha u és w egyike a másik **nemnegatív** skalárszorosa.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

$\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ minden v és w vektorra.

9. Definiáljuk (a Q által felvett értékek segítségével), mit jelent az, hogy a Q kvadratikus alak indefinit. (**Nem** a sajátértékekkel való jellemzés a kérdés!)

$(\exists v)(Q(v) > 0)$ és $(\exists v)(Q(v) < 0)$.

10. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformációnak invariáns altere.

Minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.