NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $(\forall\lambda)(\forall v)\lambda v = (0,0)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$1 \cdot v = v$, $v \neq 0$ tetszőleges.

12. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$ egy részhalmazát, mely $\mathbb{R}$ fölött háromdimenziós altér, de $\mathbb{C}$ fölött nem altér.

Pl. azok a vektorok, melyeknek az első komponense valós, a második tetszőleges.

13. Ha $\mathbb{R}^{10}$-nek W_1 és W_2 alterei, $\dim(W_1) = 7$ és $\dim(W_2) = 6$, akkor mik $\dim(W_1 \cap W_2)$ lehetséges értékei?

3, 4, 5, 6.

14. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy háromelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan egy legyen lineárisan független.

Pl. $\{0, 1, x\}$.

15. Egy vektortérben van négyelemű összefüggő generátorrendszer, és kételemű, 1 rangú rendszer is. Mi lehet a dimenzió?

1, 2, 3.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $(A+B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, T, S, R, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(R) Leképezés szorzattartása.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((A+B)C\big)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(A+B)\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(AC)(v) + (BC)(v) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$(AC+BC)(v)$$

18. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és $r(A) = 1$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A^2)$ lehetséges értékei?

5 vagy 6.

19. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor 2 sajátértékkel és $f(x) = x^2 + i \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

   $(4i - 1)v$

20. Egy $\mathbb{R}^{6\times 6}$-beli mátrix minimálpolinomja $x(x+i+1)(x-i+1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

   2 vagy 4.

21. Ha az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ minimálpolinomja $x^3 - 2$, akkor mennyi $\det(A)$?

   2

22. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek minimálpolinomja $(x - i)^3$, karakterisztikus polinomja $(x - i)^4$.

   Pl. $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

23. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{6\times 6}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^4 - 1)(x - i)^2$. Mi lehet a minimálpolinomja?

   $(x^4 - 1)(x - i)^k$, $k = 1, 2$.

24. $(1 + b - c)^2 = 3(1 + b^2 + c^2)$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

   $b = 1$ és $c = -1$

25. Az $\begin{pmatrix} a & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

   Ha a tisztán képzetes.

26. Egy unitér mátrix determinánsa $(1/3) + ci$. Mik a valós c szám lehetséges értékei?

   $\pm 2\sqrt{2}/3$

27. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixnak $(1/2) + i\sqrt{3}/2$ sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóbeli elemek összege?

   0 vagy 2.

28. Hány egydimenziós invariáns altere van egy origón átmenő egyenesre tükrözésnek a síkon?

   2

29. A térben az xy sík A-invariáns. Adjuk meg A^* egy sajátvektorát.

   Pl. $(0, 0, 1)$.

30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix minden eleme pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit."

   Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.