NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $(\forall\lambda)(\forall v)\lambda v = (0,0)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$ egy részhalmazát, mely $\mathbb{R}$ fölött háromdimenziós altér, de $\mathbb{C}$ fölött nem altér.

13. Ha $\mathbb{R}^{10}$-nek W_1 és W_2 alterei, $\dim(W_1) = 7$ és $\dim(W_2) = 6$, akkor mik $\dim(W_1 \cap W_2)$ lehetséges értékei?

14. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy háromelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan egy legyen lineárisan független.

15. Egy vektortérben van négyelemű összefüggő generátorrendszer, és kételemű, 1 rangú rendszer is. Mi lehet a dimenzió?

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $(A+B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, T, S, R, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(R) Leképezés szorzattartása.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 v. 3 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \big((A+B)C\big)(v) &= \quad \square \\ (A+B)\big(C(v)\big) &= \quad \square \\ A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) &= \quad \square \\ (AC)(v) + (BC)(v) &= \quad \square \\ (AC+BC)(v) & \end{aligned}$$

18. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és $r(A) = 1$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A^2)$ lehetséges értékei?

19. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor 2 sajátértékkel és $f(x) = x^2 + i \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

20. Egy $\mathbb{R}^{6\times 6}$-beli mátrix minimálpolinomja $x(x+i+1)(x-i+1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

21. Ha az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ minimálpolinomja x^3-2, akkor mennyi $\det(A)$?

22. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek minimálpolinomja $(x-i)^3$, karakterisztikus polinomja $(x-i)^4$.

23. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{6\times 6}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^4-1)(x-i)^2$. Mi lehet a minimálpolinomja?

24. $(1+b-c)^2 = 3(1+b^2+c^2)$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

25. Az $\begin{pmatrix} a & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

26. Egy unitér mátrix determinánsa $(1/3) + ci$. Mik a valós c szám lehetséges értékei?

27. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixnak $(1/2) + i\sqrt{3}/2$ sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóbeli elemek összege?

28. Hány egydimenziós invariáns altere van egy origón átmenő egyenesre tükrözésnek a síkon?

29. A térben az xy sík A-invariáns. Adjuk meg A^* egy sajátvektorát.

30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix minden eleme pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit.”