NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

**I. rész (30 perc).** *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját **a halmazos jelöléssel**, figyelve arra, hogy mik a futó változók, és mik nem.

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$$

2. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis a $V$ vektortérben és $v \in V$. Definiáljuk a $[v]_\mathbf{b}$ koordinátavektort.

$[v]_\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$.

3. Mondjuk ki a $\mathrm{Hom}(V, W)$ dimenzióját megadó képletet.

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim(V) \dim(W).$$

4. Mondjuk ki a dimenziótételt (felírva azt is, hogy a leképezés honnan hová képez, és az ezen vektorterekre vonatkozó feltételeket).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $\dim(V)$ véges, akkor $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim V$.

5. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételnek az $A$ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját összekapcsoló alakját.

$A$ minimálpolinomja osztója $A$ karakterisztikus polinomjának.

6. Definiáljuk az $A$ lineáris leképezés rangját.

$r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

7. Definiáljuk az ortogonális transzformáció fogalmát. Milyen test fölött beszélünk erről?

Egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren értelmezett $A$ lineáris transzformáció akkor ortogonális, ha $A^* = A^{-1}$.

8. Definiáljuk (a $Q$ által felvett értékek segítségével), mit jelent az, hogy a $Q$ kvadratikus alak negatív szemidefinit. (**Nem** a sajátértékekkel való jellemzés a kérdés!)

$(\forall v)(Q(v) \leq 0)$ és $(\exists v \neq 0)(Q(v) = 0)$.

9. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ONB, és az $A$ lineáris transzformáció mátrixa ebben a bázisban $M$, akkor hogyan írható fel $M$-ben az $i$-edik sor $j$-edik eleme skaláris szorzat segítségével?

$\langle b_i, A(b_j) \rangle$.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely $A \in \mathrm{Hom}(V)$ esetében kapcsolatot létesít $A$ és $A^*$ invariáns alterei között.

Ha a $W$ altér $A$-invariáns, akkor a $W^\perp$ ortogonális kiegészítő altér $A^*$-invariáns.