

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Módosítsuk a síkon, mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortérben a skalárral szorzást így:  $(\forall \lambda)(\forall v)\lambda v = (0, 1)$ . Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl.  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ,  $\lambda = \mu = 1$ ,  $v \neq 0$  tetszőleges.

12. Adjuk meg  $\mathbb{R}^3$  egy részhalmazát, mely összeadásra nem zárt, de valós skalárral szorzásra igen.

Pl. azok a vektorok, melyeknek van nulla komponense. Két origón átmenő sík uniója is jó.

13. Adjunk példát  $W_1$  és  $W_2$  háromdimenziós alterekre, melyek összege négydimenziós.

Pl.  $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 : a_1 = 0\}$  és  $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 : a_2 = 0\}$ .

14. Adjunk meg  $\mathbb{R}[x]$ -ben egy háromelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan kettő legyen lineárisan független.

Pl.  $\{x, 2x, x^2\}$ .

15. Ha egy 4-dimenziós vektortér egy  $W$  valódi alterében van háromelemű 2 rangú, és egyelemű független rendszer is, akkor mik  $W$  dimenziójának lehetséges értékei?

2, 3.

- 16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, P, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S)  $A$ , illetve  $B$  összegtartó.

(P)  $A$ , illetve  $B$  skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;  
2 helyes válasz: 1 pont;  
egyébként: 0 pont.)

$$(A + B)(\lambda v) = \boxed{\text{O}}$$

$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \boxed{\text{P}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{\text{N}}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{O}}$$

$$\lambda((A + B)(v))$$

18. Ha  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^8)$  és  $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$ , akkor mik  $A$  rangjának lehetséges értékei?

Csak a 4.

19. Ha  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  rangja 1 és  $N \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , akkor mik  $r(MN)$  lehetséges értékei?

0 vagy 1.

20. Ha az  $A$  lineáris leképezés minimálpolinomja  $x^2 + 3$ , és  $A(v) = w$ , akkor mi lesz  $A(w)$  értéke?

 $-3v$ 

21. Mennyi a térben egy síkra tükrözés determinánusa?

 $-1$ 

22. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek rangja 2, karakterisztikus polinomja  $x^4$ .

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Adjunk meg egy olyan, valós fölött nem diagonalizálható valós mátrixot, amelynek az  $i$  sajátértéke.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24. Határozzuk meg az  $(1, 0, 1)$  és a  $(0, 1, 1)$  vektorok szögét.

 $60^\circ$ .

25. Ha  $A$  normális transzformáció, és minimálpolinomja  $x^k$ , akkor mik  $k$  lehetséges értékei?

Csak  $k = 1$ .

26. Az  $M$  normális mátrixra és a  $v$  vektorra  $Mv = iv$ . Mennyi lesz  $M^*v$ ?

 $-iv$ .

27. Az  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ortogonális mátrix egyik sajátértéke 1. Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

 $x - 1$  és  $x^2 - 1$ .

28. Adjuk meg a térben a  $z$ -tengely körüli  $40^\circ$ -os forgatás egy olyan invariáns alterét, ami nem csak sajátvektorokból áll.

A  $z = 0$  sík.

29. Adjuk meg az  $(1, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$  által generált altér ortogonális kiegészítő alterének a dimenzióját.

2

30. Egy  $2 \times 2$ -es szimmetrikus mátrix determinánusa  $-1$ . Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak karaktere?

Indefinit.