NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $(\forall\lambda)(\forall v)\lambda v = (0, 1)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy részhalmazát, mely összeadásra nem zárt, de valós skalárral szorzásra igen.

13. Adjunk példát W_1 és W_2 háromdimenziós alterekre, melyek összege négydimenziós.

14. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy háromelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan kettő legyen lineárisan független.

15. Ha egy 4-dimenziós vektortér egy W **valódi** alterében van háromelemű 2 rangú, és egyelemű független rendszer is, akkor mik W dimenziójának lehetséges értékei?

16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, P, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A, illetve B összegtartó.
(P) A, illetve B skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(A+B)(\lambda v) = \quad \square$$
$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big)$$

18. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^8)$ és $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

19. Ha $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ rangja 1 és $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, akkor mik $r(MN)$ lehetséges értékei?

20. Ha az A lineáris leképezés minimálpolinomja $x^2 + 3$, és $A(v) = w$, akkor mi lesz $A(w)$ értéke?

21. Mennyi a térben egy síkra tükrözés determinánsa?

22. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek rangja 2, karakterisztikus polinomja x^4.

23. Adjunk meg egy olyan, valós fölött nem diagonalizálható valós mátrixot, amelynek az i sajátértéke.

24. Határozzuk meg az $(1, 0, 1)$ és a $(0, 1, 1)$ vektorok szögét.

25. Ha A normális transzformáció, és minimálpolinomja x^k, akkor mik k lehetséges értékei?

26. Az M normális mátrixra és a v vektorra $Mv = iv$. Mennyi lesz M^*v?

27. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonális mátrix egyik sajátértéke 1. Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

28. Adjuk meg a térben a z-tengely körüli $40°$-os forgatás egy olyan invariáns alterét, ami nem csak sajátvektorokból áll.

29. Adjuk meg az $(1, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ által generált altér ortogonális kiegészítő alterének a dimenzióját.

30. Egy 2×2-es szimmetrikus mátrix determinánsa -1. Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak karaktere?