

## Bsc algebra2 gyakorlat

Hetedik feladatsor (2014 tavasz, 9. prezentáció)

1. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

- (1) Ha  $Av = \lambda v$  és  $A^*w = \mu w$ , akkor  $\bar{\lambda} = \mu$  vagy  $v \perp w$ .
- (2)  $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$  és  $\text{Im } A^* = (\text{Ker } A)^\perp$ .
- (3)  $AA^* = 0 \implies A = 0$ .
- (4)  $A^*B = BA^* = 0 \implies \text{Im}(A + B) = \text{Im } A \oplus \text{Im } B$ .

2. Igazoljuk, hogy ha  $A$  és  $B$  önadjungált, akkor  $AB$  pont akkor önadjungált, ha  $AB = BA$ .

3. Mutassuk meg, hogy az  $A$  transzformáció akkor és csak akkor normális, ha tetszőleges  $v$  vektorra  $\|Av\| = \|A^*v\|$  teljesül.

4. (\*) Igazoljuk, hogy minden  $\mathbb{C}$  feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, és hogy egy transzformáció pontosan akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek felcserélhetők.

5. Legyen  $T$  a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha  $T$  diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

6. Mutassuk meg, hogy  $A$  minden sajátalterének minden altere, továbbá  $\text{Im}(A)$  és  $\text{Ker}(A)$  is  $A$ -invariáns altér.

7. Legyen  $A$  a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg  $A$  invariáns altereit.

8. Határozzuk meg egy  $4 \times 4$ -es Jordan-blokk invariáns altereit. Függet-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?

9. Milyen kapcsolatban állnak  $A$  és  $A^*$  karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?

10. Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?

11. Mutassuk meg, hogy ha  $AB = BA$ , akkor  $A$  minden sajátaltere, továbbá  $\text{Im}(A)$  és  $\text{Ker}(A)$  is  $B$ -invariáns altér.

### Néhány feladat eredménye

6/3. (1): Pitagorasz tétele; komplex fölött  $\implies$  igaz,  $\Leftarrow$  nem. (2): A rombusz átlói merőlegesek; komplex fölött  $\Leftarrow$  igaz,  $\implies$  nem. (3): A paralelogramma átlóinak a négyzetösszege ugyanaz, mint az oldalainak a négyzetösszege; komplex fölött is igaz.  $\square$

6/5. Használjuk a Cauchy-egyenlőtlenséget. A maximum értéke  $\sqrt{30}$ .  $\square$

6/7.  $b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ,  $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$  ONB  $W$ -ben. Az ortogonalizációt  $(1, 2, 3, 4)$ -gyel folytatva  $w = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$ , aminek a hossza, és így a keresett távolság 5, továbbá  $b_4 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ .

Második megoldás: A  $W$  altér a  $v = (1, 1, 1, 1)$  vektorra merőleges vektorok halmaza. Legyen  $(1, 2, 3, 4) = \lambda(1, 1, 1, 1) + u$ , ahol  $u \in W$ . Ezt skalárisan  $v$ -vel szorozva  $v \perp u$  miatt  $1 + 2 + 3 + 4 = 4\lambda$ , ahonnan  $\lambda = 5/2$  és  $u = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$ . Az  $(1, 2, 3, 4)$  távolsága  $W$ -től (azaz a  $W$ -re vett merőleges vetületétől) a  $\lambda v$  hossza, azaz 5.  $\square$

**6/8.**  $b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ,  $b_3 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  egy ONB  $U$ -ban. Az  $U^\perp$  alteret az  $U$  normálvektora generálja, elemei  $(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$ . A keresett felbontás  $(1, 0, 0, 0) = (1/4)(3, -1, 1, 1) + (1/4)(1, 1, -1, -1)$ .  $\square$

**6/11.** A négyzetösszeg alakok a következők.

$$x^2 - xy + y^2 = (1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (3/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ pozitív definit.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

pozitív szemidefinit (a 0 is sajátérték).

$$x^2 - 3xy + y^2 = -(1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (5/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ indefinit.}$$

$$x^2 + xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1-\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2,$$

indefinit.

$$-x^2 + 10xy - y^2 - z^2 = -6\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2,$$

indefinit.

$$xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x+\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).

$$xy + xz + yz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\right)^2,$$

indefinit. Itt vigyázni kell, mert a  $-1/2$  sajátértékhez tartozó sajátaltér kétdimenziós, ebben a Gram–Schmidt-eljárással adtuk meg ONB-t (ami nem is egyértelmű).

$$-x^2 + 2xy + 2xz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{-2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).  $\square$

**6/12.** Egyik sem négyzetösszeg alak, mert abban az együtthatókból képzett vektoroknak bázist kell alkotniuk. Az első felírásból így is látszik, hogy ez az alak pozitív definit.  $\square$

**6/14.** A síkon a(z origót fixáló) tükrözések, forgatások ortogonálisak, hiszen egybevágósági transzformációk, de a vetítés nem az. A tükrözés és a merőleges vetítés szimmetrikus (mert ONB-ben diagonalizálható valós fölött), de a forgatás csak akkor, ha a szöge  $k180^\circ$ .  $\square$

**6/15-16.**  $A$  nem normális (a mátrixa egy Jordan-blokk, nem ortonormált bázisban sem diagonalizálható).  $B$  unitér, így normális, de nem önadjungált (valóban ortogonális, de nem szimmetrikus).  $C$  nem normális, de azért nem ortonormált bázisban diagonalizálható (ez egy nem merőleges vetítés).  $D$  önadjungált, így normális, de nem unitér (valóban szimmetrikus de nem ortogonális).  $E$  normális, de se nem önadjungált, se nem unitér.  $F$  ortogonális és szimmetrikus is.  $G$  és  $H$  ortogonális, de nem szimmetrikus.  $\square$