Bsc algebra2 gyakorlat

Második feladatsor (2014 tavasz, 2. előadás)

1. Az alábbiak közül melyik bázis és melyik ortonormált is $\mathbb{R}^2$-ben? (a) $(1,1)$ és $(2,2)$; (b) $(0,1)$ és $(1,1)$; (c) $(1,1)$ és $(1,-1)$; (d) $(1,1)/\sqrt{2}$ és $(1,-1)/\sqrt{2}$. Írjuk föl az $(1,2)$ koordinátáit a (b)- és (d)-beli bázisban is.

2. Melyik bázis $\mathbb{R}^3$-ben? (a) $\{(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,2,5)\}$; (b) $\{(1,2,3),\ (0,1,0),\ (3,2,1)\}$; (c) $\{(1,1,1),\ (1,2,4),\ (1,3,9)\}$; (d) $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$. Amelyik bázis, abban adjuk meg az $(1,0,0)$ koordinátáit.

3. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját, és adjunk meg egy-egy bázist.

(1) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.
(2) A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.
(3) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?
(4) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.
(5) Azon legfeljebb negyedfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek $\sqrt{2}$ gyöke.
(6) Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.
(7) A $T^{2\times 3}$ a T test felett.
(8) A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.

4. Határozzuk meg $\{x-1,\ x^2-3x+2,\ x^2-6x+5\}$ és $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$, valamint az **I/1**, **I/3(a)**, **I/14** feladatokban szereplő vektorrendszerek rangját.

5. Bizonyítsuk be, hogy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = r(\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\})$.

6. Adjuk meg $\mathbb{R}^4$ megadott két-két alterének összegét és metszetét. (a) Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz. (b) Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla. (c) Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.

7. ***(*)*** Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

8. Hány $n-1$-dimenziós altere van egy $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek $n \geq 2$ esetén?

9. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?

(1) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
(2) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
(3) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
(4) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(5) Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
(6) Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
(7) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
(8) Van olyan $n+1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

10. ***(*)*** A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?