Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2013. május 7.) — eredmények és pontozás

1. Kibontva $\|u+v\| = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$, és hasonlóan felírható, hogy $\|u-v\| = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$ (2 pont). A kettő pontosan akkor egyenlő, ha $\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle = 0$, ami valósban azzal ekvivalens, hogy $\langle u,v\rangle = 0$ (1 pont), hiszen itt $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ (1 pont). Komplexben ellenpélda a $\mathbb{C}^1$ vektortérben $u = (1)$ és $v = (i)$ (2 pont). Komplex fölött azzal ekvivalens a feltétel, hogy $\langle u,v\rangle$ tisztán képzetes, mert itt $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ (ez extra 1 pont).

2. A leképezés mátrixa és ennek adjungáltja

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(1+1 pont).}$$

Szorzással ellenőrizhetjük, hogy $MM^* = M^*M$, azaz a mátrix normális (1 pont), de ez a szorzat nem az egységmátrix, ezért a mátrix nem unitér (1 pont) és nyilván nem is önadjungált (1 pont). Mivel $A(v) = (i-1, -i, 0, 0)$ ezért a keresett skaláris szorzat $0 + \overline{(-i)}(-i) + 0 + 0 = 1$ (1 pont).

3. A karakterisztikus polinom $(3-x)^3$ (1 pont). Ezért a minimálpolinom csak $x-3$, $(x-3)^2$ vagy $(x-3)^3$ lehet (1 pont). A mátrixot behelyettesítve látjuk, hogy az elsőnek nem gyöke, a másodiknak igen, ezért a minimálpolinom $(x-3)^2$ (2 pont). Ezért a legnagyobb blokkméret 2×2-es, vagyis a Jordan-alak

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 pont).}$$

4. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ (1 pont). Ha $v = (1,2,0) \in W$, akkor a Gram–Schmidt-módszer képletéből $b = (1,2,0) - (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (1/2, 2, -1/2)$ (2 pont). Ennek normája $3/\sqrt{2}$, ezért $b_2 = (\sqrt{2}/6, 4\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6)$ (1 pont). Legyen most $v = (0,6,0)$, akkor $b = (-4/3, 2/3, 4/3)$. A keresett távolság ennek a normája, azaz 2 (2 pont). Ezt a távolságot úgy is megkaphatjuk, hogy a W sík normálvektorát, ami $(2/3, -1/3, -2/3)$, skalárisan szorozzuk $(0,6,0)$-val, majd abszolút értéket veszünk.

5. A keresett mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 pont), karakterisztikus polinomja $(1-x)(x^2-3x-4)$ (1 pont), a sajátértékek $-1, 1, 4$ (1 pont). Ezért az alak indefinit (1 pont). A sajátvektorokat kiszámolva a négyzetösszeg alak

$$y^2 + (-1)\Big(\frac{x-2z}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 4\Big(\frac{2x+z}{\sqrt{5}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

6. Szimmetrikus (valós) mátrix nem tehet eleget a feltételnek, mert annak a főtengelytétel miatt minden sajátértéke valós, az $x^4 + x^2$ minimálpolinomnak pedig van nem valós gyöke is (2 pont). Az alábbi (nem szimmetrikus) M valós mátrix például megfelel. Komplex fölött Jordan alakban is megadható ilyen N mátrix.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{(4 pont).}$$