Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2013. március 22.) — eredmények és pontozás

1. Mivel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ (1 pont), a keresett transzformáció az $y = -x$ egyenesre való tükrözés (1 pont). Bázistranszformációt végzünk: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), ezért $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ (1 pont), a végeredmény $S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (2 pont). *Második megoldás:* Bázistranszformáció helyett $A\big((1,2)\big) = (-2,-1)$ és $A\big((1,0)\big) = (0,-1)$. A megfelelő két lineáris egyenletrendszert megoldva a fenti mátrixot kapjuk (4 pont).

2. W_1 nem altér, mert a nullapolinom nincs benne (1 pont). A W_2 elemei azok a polinomok, amelyeknek az 5 gyöke (1 pont). Ezek alteret alkotnak (0 pont), melyben $(x-5)$, $(x-5)x$, $(x-5)x^2$ és $(x-5)x^3$ bázis (indoklás nélkül 1 pont), és így dimenziója 4 (1 pont). E polinomok függetlenek, mert a fokuk páronként különböző (1 pont). Generátorrendszert alkotnak (bármilyen jó indoklás 1 pont), mert W_1 elemei $(x-5)(a+bx+cx^2+dx^3)$ alakúak ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. *Másik indoklás:* W_2 valódi altér a legfeljebb negyedfokú polinomok között, amely 5-dimenziós, ezért a keresett dimenzió legfeljebb 4 lehet, de W_2-ben van négy független vektor, tehát a dimenzió legalább 4, és így pontosan 4, ezért minden 4-elemű független rendszer maximális független, azaz bázis.

3. B nem lineáris, mert ha v az a vektor, amelynek minden komponense 1, akkor $B(2v) = 4$ ami nem egyenlő $2B(v) = 2$-vel (2 pont). Az A lineáris (0 pont), a szokásos bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (4 pont). A szokásos bázis vektorai } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ illetve } 1.$$

4. Mivel F a $+1$ fokos forgatás, ezért F^{90} a $+90$ fokos forgatás (2 pont). A szokásos bázisban $[Y] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $[F^{90}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), így $[F^{90}Y] = [F^{90}][Y] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $(2,1)$ képe $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1 pont).

5. A számolásmentes megoldás: vegyük észre, hogy V azokból a vektorokból áll, melyek koordinátaösszege nulla. Valóban, a generátorok ilyenek, tehát V minden vektora ilyen. Ugyanakkor $\dim(V) \geq 2$, hiszen v_1 és v_2 független, másrészt azok a vektorok, ahol a koordinátaösszeg nulla, valódi altér $\mathbb{R}^3$-ben tehát legfeljebb kétdimenziós. Ekkor világos, hogy $w_1 \notin V$ de $w_2 \in V$ (ez 3 pont és kihozható lineáris egyenletrendszer megoldásával is). Tehát $\dim V = 2$ és $V + W$-nek V valódi altere, hiszen $w_1 \in V + W$, de $w_1 \notin V$, vagyis $V + W$ legalább háromdimenziós, és így csak az egész $\mathbb{R}^3$ lehet (1 pont). A képlet miatt $\dim(V \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$ (1 pont). De $w_2 \in V \cap W$, tehát w_2 generálja a metszetet, vagyis $V \cap W$ a $(0, a, -a)$ alakú vektorokból áll (1 pont).

6. Például legyen A az a leképezés, amelyre

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a + b - c - d \end{pmatrix} \text{ (3 pont).}$$

Nyilván $(1,1,1,1)^T$ képe nulla (1 pont), és a képtér azokból a vektorokból áll, melyek első komponense nulla, vagyis 1-dimenziós (1 pont). A dimenziótétel miatt a magtér háromdimenziós (1 pont).