Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2013. május 7.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve (GyK vagy KE).

1. Legyenek u és v vektorok egy euklideszi térben. Igaz-e valós, illetve komplex fölött, hogy $\|u+v\| = \|u-v\|$ akkor és csak akkor teljesül, ha u ortogonális v-re? (Ha valamelyik nem teljesül, akkor indoklásképpen ellenpéldát is kell adni.)

2. Tekintsük $\mathbb{C}^4$-en az

$$A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)u_4 \\ u_2 \\ 0 \\ (1+i)u_1 \end{bmatrix},$$

transzformációt. Vizsgáljuk meg, hogy A normális-e, unitér-e, önadjungált-e, és számítsuk ki a $\langle v, A(v)\rangle$ skaláris szorzatot abban az esetben, amikor $v = (0, -i, 1, i)^T$.

3. Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix minimálpolinomját és Jordan-alakját.

4. Álljon W azon (x, y, z) pontokból $\mathbb{R}^3$-ben, melyekre $2x - y - 2z = 0$. Adjunk meg egy ortonormált bázist a W altérben, és határozzuk meg a $(0, 6, 0)$ pont távolságát W-től.

5. Határozzuk meg a $3x^2 + y^2 + 4xz$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét. (Segítség: a sajátértékek egész számok.)

6. Adjunk példát olyan M komplex, illetve **valós** mátrixra, melynek minimálpolinomja $x^4 + x^2$. Van-e ilyen (valós) szimmetrikus mátrix is?