Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2013. március 22.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve (GyK vagy KE).

1. Legyen C az a lineáris transzformáció a síkon, melynek mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mi ez a transzformáció? Mi C mátrixa az $(1,2)$, $(1,0)$ bázisban?

2. Legyen V a $\mathbb{C}[x]$ mint $\mathbb{C}$ fölötti vektortér azon altere, amely a legfeljebb negyedfokú polinomokból és a nullapolinomból áll, továbbá

a) $W_1 = \{f \in V \,:\, f(5) = 0 \text{ és } f \text{ konstans tagja } 1\}$ és

b) $W_2 = \{f \in V \,:\, f(5)^3 = 0\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (de ne igazoljuk, hogy altér). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

3. Legyen $V = \mathbb{Q}^3$ és $W = \mathbb{Q}$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektorterek, továbbá $A, B : V \to W$, ahol

a) $A(v)$ a v első két komponensének összege, és

b) $B(v)$ a v első két komponensének szorzata.

Amelyik nem lineáris transzformáció A és B közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázispárban (de ne igazoljuk, hogy lineáris).

4. Legyen Y a síkon az y-tengelyre való tükrözés, F pedig forgatás az origó körül $+1$ fokkal. Mi az $F^{90}Y$ transzformáció mátrixa (a szokásos bázisban), és hová viszi ez a $(2,1)$ pontot?

5. Legyen $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ és $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ (alterek az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben), ahol

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eleme-e a w_1, illetve w_2 a V-nek? Igazoljuk, hogy $V + W = \mathbb{R}^3$. Igaz-e, hogy $V \cap W$ elemeinek első komponense nulla?

6. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{R}$ fölött lineáris $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, melynek magtere háromdimenziós, és tartalmazza az $(1,1,1,1)^T$ vektort.