Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. júl. 4.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek a T test fölött. Figyeljünk a logikailag helyes megfogalmazásra.

> **Minden** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ esetén, **ha** $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, **akkor** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2. Jellemezzük a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangját a független részhalmazok segítségével. (Nem a dimenzióval való definíciót kérdezzük.)

> $r(v_1, \ldots, v_n) = r$, ha $\{v_1, \ldots, v_n\}$-nek van r elemű lineárisan független részhalmaza, de bármely $r+1$ elemű részhalmaz lineárisan összefüggő.

3. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis a V vektortérben és $v \in V$. Definiáljuk a $[v]_\mathbf{b}$ koordinátavektort.

> $[v]_\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$.

4. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött ki lehet számítani.

> $\langle b_i, v \rangle$

5. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

> Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

6. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

7. Soroljunk föl két olyan fogalmat, amely hasonló négyzetes mátrixok esetében egyenlő.

Pl. rang, determináns, karakterisztikus és minimálpolinom, sajátértékek, Jordan-alak.

8. Írjuk föl euklideszi térben a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenséget. Az egyenlőség kérdésével nem kell foglalkozni.

Tetszőleges u és w vektorokra $|\langle u, w\rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$.

9. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor unitér. (Az unitér és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor unitér, ha minden sajátértéke 1 abszolút értékű.

10. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.