NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha $v \in V$ rögzített vektor egy T test fölötti V vektortérben, akkor $\mu \mapsto \mu v$ összegtartó $T \to V$ leképezés?

$(\mu + \lambda)v = \mu v + \lambda v.$

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a páros fokú valós együtthatós polinomok halmaza nem zárt az összeadásra.

Pl. x^4 és $x - x^4$.

13. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = 3p(0) + 2ip(4)$. Mi A mátrixa a szokásos bázisban?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

14. Adjuk meg az u, v, w vektorokat úgy, hogy $\{u, v\}$ független legyen, de $\{u, w\}$ és $\{v, w\}$ ne legyen az.

Pl. $x, x^2, 0 \in \mathbb{R}[x]$

15. Ha egy $\{0\} \neq W \leq \mathbb{R}^7$ altérben minden ötelemű generátorrendszerből kiválasztható kételemű generátorrendszer, akkor mik $\dim(W)$ lehetséges értékei?

1, 2, 6, 7.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a S, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\begin{array}{lll} \textit{Pontozás:} & 4 \text{ v. } 5 \text{ helyes válasz:} & 2 \text{ pont;} \\ & 2 \text{ v. } 3 \text{ helyes válasz:} & 1 \text{ pont;} \\ & \text{egyébként:} & 0 \text{ pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\big((\lambda A)B\big)(v) &= && \boxed{\text{S}} \\
(\lambda A)\big(B(v)\big) &= && \boxed{\text{L}} \\
\lambda\big(A(B(v))\big) &= && \boxed{\text{A}} \\
A\big(\lambda(B(v))\big) &= && \boxed{\text{L}} \\
A\big((\lambda B)(v)\big) &= && \boxed{\text{S}} \\
\big(A(\lambda B)\big)(v)
\end{aligned}$$

18. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor -2 sajátértékkel és $f(x) = ix^2 - 2 \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(3v)$?

    $(12i - 6)v$

19. Ha $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ determinánsa $1 + 2i$, akkor mennyi $\det(A^*)$?

    $1 - 2i$

20. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^3. Mik M rangjának lehetséges értékei?

    2 vagy 3.

21. Egy $\mathbb{C}^{3\times 3}$-beli mátrix minimálpolinomja $x^2 - 1$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

    $-(x-1)^2(x+1)$ vagy $-(x-1)(x+1)^2$.

22. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ diagonalizálható mátrixra $M^4 = 0$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

    Csak x.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei?

    $c \neq 0$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei?

    $|c| = 1$.

25. Egy valós ortogonális M mátrix sajátértékei valósak. Mik M^2 lehetséges értékei?

    Csak E.

26. Egy valós szimmetrikus M mátrix sajátértékei 1 abszolút értékűek. Mik M^2 lehetséges értékei?

    Csak E.

27. Adjunk meg egy $(3i, 2)$-re merőleges 2 hosszú vektort.

    $(4/\sqrt{13}, 6i/\sqrt{13})$

28. Legyen $W = \left\langle (1, i, -i)^T, (-i, 1, -1)^T \right\rangle \leq \mathbb{C}^3$. Mennyi $W^\perp$ dimenziója?

    2

29. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív szemidefinit (amibe beleértendő, hogy nem pozitív definit)?

    Ha $c = 4$.

30. Adjuk példát két hasonló mátrixra, melyek sajátalterei nem ugyanazok. Meg kell adni egy sajátértéket, továbbá a hozzá tartozó két különböző sajátalteret is.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1-hez tartozó sajátaltere $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, illetve $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.