NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha $v \in V$ rögzített vektor egy T test fölötti V vektortérben, akkor $\mu \mapsto \mu v$ összegtartó $T \to V$ leképezés?

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a páros fokú valós együtthatós polinomok halmaza nem zárt az összeadásra.

13. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = 3p(0) + 2ip(4)$. Mi A mátrixa a szokásos bázisban?

14. Adjuk meg az u, v, w vektorokat úgy, hogy $\{u, v\}$ független legyen, de $\{u, w\}$ és $\{v, w\}$ ne legyen az.

15. Ha egy $\{0\} \neq W \leq \mathbb{R}^7$ altérben minden ötelemű generátorrendszerből kiválasztható kételemű generátorrendszer, akkor mik $\dim(W)$ lehetséges értékei?

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a S, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:} \quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 5 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 v. 3 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\big((\lambda A)B\big)(v) &= \quad \boxed{} \\
(\lambda A)\big(B(v)\big) &= \quad \boxed{} \\
\lambda\big(A(B(v))\big) &= \quad \boxed{} \\
A\big(\lambda(B(v))\big) &= \quad \boxed{} \\
A\big((\lambda B)(v)\big) &= \quad \boxed{} \\
\big(A(\lambda B)\big)(v) &
\end{aligned}$$

18. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor -2 sajátértékkel és $f(x) = ix^2 - 2 \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(3v)$?

19. Ha $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ determinánsa $1 + 2i$, akkor mennyi $\det(A^*)$?

20. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^3. Mik M rangjának lehetséges értékei?

21. Egy $\mathbb{C}^{3\times 3}$-beli mátrix minimálpolinomja $x^2 - 1$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

22. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ diagonalizálható mátrixra $M^4 = 0$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei?

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei?

25. Egy valós ortogonális M mátrix sajátértékei valósak. Mik M^2 lehetséges értékei?

26. Egy valós szimmetrikus M mátrix sajátértékei 1 abszolút értékűek. Mik M^2 lehetséges értékei?

27. Adjunk meg egy $(3i, 2)$-re merőleges 2 hosszú vektort.

28. Legyen $W = \left\langle (1, i, -i)^T, (-i, 1, -1)^T \right\rangle \leq \mathbb{C}^3$. Mennyi $W^\perp$ dimenziója?

29. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív szemidefinit (amibe beleértendő, hogy nem pozitív definit)?

30. Adjuk példát két hasonló mátrixra, melyek sajátalterei nem ugyanazok. Meg kell adni egy sajátértéket, továbbá a hozzá tartozó két különböző sajátalteret is.