Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jún. 20.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. **Mindkét kvantort expliciten írjuk ki a megfogalmazásban.**

Minden $v \in V$-hez **létezik** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

2. Definiáljuk a V vektortér U és W altereinek összegét **a halmazos jelöléssel.**

$U + W = \{u + w : u \in U \text{ és } w \in W\}$.

3. Legyen $\dim V = a$ és $\dim W = b$. Mennyi lesz $\dim \operatorname{Hom}(V, W)$?

$\dim \operatorname{Hom}(V, W) = a \cdot b$.

4. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A, B \in \operatorname{Hom}(V, W)$ lineáris leképezések **összegének** mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ bázis rendre V, W-ben, akkor $[A + B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}} + [B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

5. Definiáljuk a bal oldali nullosztó fogalmát $\operatorname{Hom}(V)$-ben.

A bal oldali nullosztó, ha nem nulla, és van olyan $0 \neq B \in \operatorname{Hom}(V)$, melyre $AB = 0$.

6. Definiáljuk az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés $r(A)$ rangját.

$r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

7. Mit jelent az, hogy két négyzetes mátrix hasonló?

Ugyanazon lineáris transzformáció mátrixai (csak esetleg más bázisban).

8. Mikor áll az u és w vektorokra felírt háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség? (Magát az egyenlőtlenséget nem kell felírni.)

Akkor és csak akkor, ha u és w egyike a másik **nemnegatív** skalárszorosa.

9. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor önadjungált. (Az önadjungált és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor önadjungált, ha minden sajátértéke valós.

10. Mi a **definíciója** annak, hogy a Q kvadratikus alak negatív szemidefinit? **Nem** a sajátértékekkel vagy az aldeterminánsokkal való jellemzést kérdezzük!

$Q(v) \leq 0$ minden v-re, **és** van olyan $v \neq 0$, melyre $Q(v) = 0$.