NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha $v \in V$ rögzített vektor egy T test fölötti V vektortérben, akkor $\mu \mapsto \mu v$ skalárszorostartó $T \to V$ leképezés?

    $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ (ami ugyanezen axióma miatt $\lambda(\mu v)$-vel egyenlő).

12. Adjuk meg az $\mathbb{R}[x]$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér egy olyan részhalmazát, mely (valós) skalárral szorzásra zárt, de összegképzésre nem.

    Pl. $\{rx, rx^2 : r \in \mathbb{R}\}$.

13. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb tizedfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{R}^{3\times 4}$ lineáris leképezés. Hány sora és hány oszlopa van az A mátrixának?

    12×11

14. Adjunk meg három összefüggő vektort úgy, hogy bármely kettő független legyen.

    Pl. $x, x^2, x + x^2 \in \mathbb{R}[x]$

15. Ha egy V vektortérben van tízelemű független és tízelemű összefüggő rendszer is, továbbá van 14 elemű összefüggő generátorrendszer is, akkor mik $\dim(V)$ lehetséges értékei?

    10, 11, 12, 13.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $C(A+B) = CA+CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, X, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) Leképezések összegének definíciója.
(X) Leképezés összegtartása.
(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\begin{aligned}
\big(C(A+B)\big)(v) &= && \boxed{\text{S}}\\
C\big((A+B)(v)\big) &= && \boxed{\text{O}}\\
C\big(A(v)+B(v)\big) &= && \boxed{\text{X}}\\
C\big(A(v)\big)+C\big(B(v)\big) &= && \boxed{\text{S}}\\
(CA)(v)+(CB)(v) &= && \boxed{\text{O}}\\
(CA+CB)(v) & &&
\end{aligned}$$

18. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor $i \in \mathbb{C}$ sajátértékkel és $f(x) = x^2 - i$, akkor mennyi $(f(A) + iA)(-v)$?

    $(2+i)v$

19. Legyen A a transzponálás az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren. Mi ennek a determinánsa?

-1

20. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^4. Mik M rangjának lehetséges értékei?

Csak a 3.

21. Egy diagonalizálható $\mathbb{C}^{6\times 6}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2-2)^3$. Mi lehet a minimálpolinomja?

x^2-2

22. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra $M^2 = -E$. Mik a sajátértékei?

i és $-i$

23. Az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

Soha.

24. Adjunk példát olyan ortogonális 2×2-es (valós) mátrixra, melynek főátlójában az elemek összege 1.

Pl. $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

25. Egy komplex mátrix önadjungált is és unitér is. Mely számok lehetnek sajátértékei?

Csak ± 1.

26. Egy 5×5-ös szimmetrikus valós mátrix Jordan-alakjában mekkora lehet a legnagyobb Jordan-blokk mérete?

1×1

27. Adjunk meg egy $(1, 2i)$-re merőleges egységvektort.

$(2/\sqrt{5}, -i/\sqrt{5})$

28. Ha $a^2+b^2=3$ és $c^2+d^2=5$, akkor mi lesz $ac+bd$ maximális értéke? Itt $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{15}$

29. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz indefinit?

Ha $c < 1$.

30. Ha B szimmetrikus bilineáris függvény, melyre $B(u,u)=1$, $B(v,v)=2$ és $B(u,v)=3$, akkor mennyi $B(u+2v, 2u-v)$?

7