Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jún. 12.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk le képlettel, mit jelent az, hogy a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ generált altér a **legszűkebb,** a $v_1, \dots, v_n$ elemeket tartalmazó altér (vagyis hogy milyen tulajdonságot takar itt a „legszűkebb" szó). A $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ altér elemeit megadó képletet nem kell leírni.

   Minden W altérre, ha $v_1, \dots, v_n \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$.

2. Definiáljuk a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangját a dimenzió fogalma segítségével.

   $r(v_1, \dots, v_n) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, azaz a $v_1, \dots, v_n$ által generált altér dimenziója.

3. Mondjuk ki az altér dimenziójáról szóló tételt véges dimenziós V vektortérre, figyelve arra is, hogy mikor állhat egyenlőség.

   Ha W altere V-nek, akkor $\dim W \leq \dim V$, és egyenlőség csak $V = W$ esetén lehetséges.
   Elfogadjuk: Ha W valódi altér V-ben, akkor $\dim W < \dim V$.

4. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

   Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c/a}} = [A]_{\mathbf{c/b}}[B]_{\mathbf{b/a}}$.

5. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ és $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ két bázis V-ben, és $S = ((s_{ij}))$ a bázistranszformáció $[A]_{\mathbf{c/c}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b/b}}S$ képletében szereplő mátrix. Írjuk föl az S elemeit megadó összefüggést.

   Az S mátrix j-edik oszlopa $[c_j]_{\mathbf{b}}$, azaz $c_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i$.

6. Definiáljuk a halmazos jelöléssel az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátalterét. (A sajátérték fogalmát nem kell definiálni.)

$\{v \in V \,:\, A(v) = \lambda v\}$.

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

8. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk, és hogy milyen bázisról van szó.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

9. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció távolságtartó.

$\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ minden v és w vektorra.

10. Definiáljuk az önadjungált transzformáció fogalmát. Milyen test fölött beszélünk erről?

$A^* = A$ ($\mathbb{C}$ fölött).