Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jún. 12.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha λ rögzített skalár, akkor a $v \mapsto \lambda v$ leképezés összegtartó a V vektortéren?

$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

12. Adjuk meg a sík mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér egy olyan részhalmazát, mely (valós) skalárral szorzásra zárt, de összegképzésre nem.

Pl. az első és harmadik síknegyed uniója.

13. Legyen $A : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés. Hány sora és hány oszlopa van az A mátrixának?

4×6

14. Mennyi az $\mathbb{R}^3$-ben, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben az xy síkra való merőleges vetítés rangja?

2

15. Ha egy 7-dimenziós vektortér egy W **valódi** alterében van háromelemű független és kételemű összefüggő rendszer is, akkor mik W dimenziójának lehetséges értékei?

3, 4, 5, 6.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $(A+B)C = AC+BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((A+B)C\big)(v) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$(A+B)\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$(AC)(v) + (BC)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(AC+BC)(v)$$

18. Ha A lineáris leképezés, és $A(v) = 3v$, továbbá $f(x) = x^2+2$, akkor mennyi $(f(A) + A^2)(2v)$?

$40v$

19. Mi $\mathbb{C}^3$-ben a $v \mapsto iv$ leképezés determinánsa?

$i^3 = -i$

20. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^5. Mik M rangjának lehetséges értékei?

Csak a 4.

21. Egy $\mathbb{R}^{3\times 3}$-beli **nem** diagonalizálható mátrix sajátértékei 2 és 3. Mi lehet a minimálpolinomja?

$(x-2)^2(x-3)$ vagy $(x-2)(x-3)^2$.

22. Mennyi $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}^n$?

$\begin{pmatrix} i^n & 0 \\ ni^{n-1} & i^n \end{pmatrix}$

23. Az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

Ha $a \neq b$.

24. Adjunk példát olyan valós mátrixra, ami $\mathbb{C}$ fölött ONB-ben diagonalizálható, és sajátértéke a $2i$.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

25. Egy valós mátrix ortogonális is és szimmetrikus is. Mely számok lehetnek sajátértékei?

Csak ± 1.

26. Az $\begin{pmatrix} b & c \\ (1/2) & b \end{pmatrix}$ valós mátrix mikor lesz egy távolságtartó transzformáció mátrixa?

$c = -(1/2)$, $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

27. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, 2u - iv\rangle$?

3

28. Legyenek u és v vektorok egy valós fölötti euklideszi térben. Mikor igaz, hogy $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|$?

Ha $u = \lambda v$ vagy $v = \lambda u$ alkalmas $\lambda \geq 0$ esetén.

29. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív definit?

Ha $c > 1$.

30. Keressünk olyan v vektort, hogy a $Q(x, y) = 2xy$ valós kvadratikus alakhoz tartozó B szimmetrikus bilineáris függvénynek $(1, 2)$ és v egy B-ortogonális bázisa legyen.

Pl. $v = (1, -2)$