

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha λ rögzített skalár, akkor a $v \mapsto \lambda v$ leképezés összegtartó a V vektortéren?

12. Adjuk meg a sík mint \mathbb{R} fölötti vektortér egy olyan részalmazát, mely (valós) skalárral szorzásra zárt, de összegképzésre nem.

13. Legyen $A : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés. Hány sora és hány oszlopa van az A mátrixának?

14. Mennyi az \mathbb{R}^3 -ben, mint \mathbb{R} fölötti vektortérben az xy síkra való merőleges vetítés rangja?

15. Ha egy 7-dimenziós vektortér egy W **valódi** alterében van háromelemű független és kételemű összefüggő rendszer is, akkor mik W dimenziójának lehetséges értékei?

- 16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben $(A+B)C = AC+BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.

(T) Leképezés összegtartása.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((A+B)C)(v) = \square$$

$$(A+B)(C(v)) = \square$$

$$A(C(v)) + B(C(v)) = \square$$

$$(AC)(v) + (BC)(v) = \square$$

$$(AC+BC)(v)$$

18. Ha A lineáris leképezés, és $A(v) = 3v$, továbbá $f(x) = x^2+2$, akkor mennyi $(f(A) + A^2)(2v)$?

19. Mi \mathbb{C}^3 -ben a $v \mapsto iv$ leképezés determinánusa?

20. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^5 . Mik M rangjának lehetséges értékei?

21. Egy $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli **nem** diagonalizálható mátrix sajátértékei 2 és 3. Mi lehet a minimálpolinomja?

22. Mennyi $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}^n$?

23. Az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható \mathbb{C} fölött?

24. Adjunk példát olyan valós mátrixra, ami \mathbb{C} fölött ONB-ben diagonalizálható, és sajátértéke a $2i$.

25. Egy valós mátrix ortogonális is és szimmetrikus is. Mely számok lehetnek sajátértékei?

26. Az $\begin{pmatrix} b & c \\ (1/2) & b \end{pmatrix}$ valós mátrix mikor lesz egy távolságtartó transzformáció mátrixa?

27. Legyenek u és v merőleges egységvektorok \mathbb{C} fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, 2u - iv \rangle$?

28. Legyenek u és v vektorok egy valós fölötti euklideszi térben. Mikor igaz, hogy $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|$?

29. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív definit?

30. Keressünk olyan v vektort, hogy a $Q(x, y) = 2xy$ valós kvadratikus alakhoz tartozó B szimmetrikus bilineáris függvénynek $(1, 2)$ és v egy B -ortogonális bázisa legyen.