Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. máj. 29.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy λv mindig nulla legyen. Melyik vektortéraxióma nem teljesül?

$1 \cdot v = v$

12. Adjuk meg $\mathbb{R}[x]$ egy részhalmazát, mely összeadásra zárt, de (valós) skalárral szorzásra nem.

Pl. az egész együtthatós polinomok.

13. Mennyi a szimmetrikus, kétszer kettes valós mátrixok terének dimenziója $\mathbb{R}$ fölött?

3

14. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben négyelemű, kettő rangú vektorrendszert ($\mathbb{R}$ fölött).

Pl. $0, 1, x, 2x$

15. Ha egy 5-dimenziós vektortér egy W **valódi** alterében van háromelemű összefüggő és kételemű független rendszer is, akkor mik W dimenziójának lehetséges értékei?

2, 3, 4.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \boxed{\text{L}}$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$\lambda\big(A(v)+B(v)\big) = \quad \boxed{\text{N}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{L}}$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. Ha A lineáris leképezés és $A(v) = 2v$, továbbá $f(x) = x^3 - 1$, akkor mennyi $f(A)(-v)$?

    $-7v$

19. Mi $\mathbb{R}^3$-ben az origóra való tükrözés kétszeresének determinánsa?

    -8

20. Egy háromszor hármas mátrix determinánsa 2. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

    Csak a 3.

21. Egy $\mathbb{R}^{3\times 3}$-beli nulla determinánsú mátrixnak az i sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?

    Csak $x(x^2+1)$.

22. Adjunk példát olyan $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli mátrixra, melynek minimálpolinomja $(x-i)^2$.

    $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

23. Adjunk példát olyan **normális** valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.

    $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

24. Adjunk példát olyan valós fölött diagonalizálható valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.

    $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a $z \in \mathbb{C}$ szám lehetséges értékei?

    z valós.

26. Ha $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke 2, akkor mennyi $\left\|(iz, i, 0)^T\right\|$?

    $\sqrt{5}$

27. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$-ben az $\left\langle (1,i)^T \right\rangle$ ortogonális kiegészítő alterének egy generátorelemét.

    Pl. $(1,-i)^T$

28. Egy példa megadásával igazoljuk, hogy a kétszer kettes önadjungált mátrixok nem alkotnak alteret $\mathbb{C}$ fölött.

    E (az egységmátrix) önadjungált, de iE nem.

29. Egy valós egybevágósági transzformáció egyik sajátértéke $(1/3) + ir$. Mik az $r \in \mathbb{R}$ lehetséges értékei?

    $\pm 2\sqrt{2}/3$

30. Egy Q valós kvadratikus alak az $(1,-1)^T$ vektoron a -1 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(-2,2)^T$ vektoron?

    -4