

Bsc algebra2 gyakorlat

Hatodik feladatsor (2013 tavasz, 7. és 8. prezentáció)

A $v = (a_1, \dots, a_n)$ és $w = (b_1, \dots, b_n)$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle v, w \rangle = \overline{a_1}b_1 + \dots + \overline{a_n}b_n$ (a felülvonás komplex konjugáltat jelöl; a képlet valósban is működik, amikor a konjugáltat ki sem kell írni). Ez mindkét változóban összegtartó, $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$, $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$, és $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (vagyis a sorrend megfordításakor konjugálni kell). A v és w *ortogonális* (merőleges), ha skaláris szorzatuk nulla. A v *hossza* $\|v\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (a valós esetben az abszolút érték kiírására sincs szükség). Ha v és w komponensei valósak, akkor az α szögüket a $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$ képlet definiálja. A Cauchy-egyenlőtlenség biztosítja, hogy a képletből kapott $\cos \alpha \in [-1, 1]$.

Ha W altér, akkor azok a vektorok, amelyek W minden elemére merőlegesek, a W^\perp *ortogonális kiegészítő alteret* alkotják, melynek W -vel vett direkt összege az egész tér.

Azt mondjuk, hogy b_1, \dots, b_n *ortonormált bázis*, röviden ONB, ha elemei páronként merőlegesek és hosszuk 1. Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor *balról* b_i -vel skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v \rangle$. Ezért egy A lineáris transzformáció mátrixa ebben az ONB-ben ($(\langle b_i, A(b_j) \rangle)$). Ortonormált bázist a *Gram-Schmidt eljárással* készíthetünk: ha b_1, \dots, b_k már megvan, és v nincs benne az általuk generált altérben, akkor b_{k+1} -et a következőképpen kapjuk. A v vektor b_i irányú vetületének hossza $\langle b_i, v \rangle$, ezért $b = v - \langle b_1, v \rangle b_1 - \dots - \langle b_k, v \rangle b_k$ már merőleges mind-egyik b_i -re. A b vektort *normáljuk*, azaz $b_{k+1} = b/\|b\|$. Itt $\langle b_1, \dots, b_k, v \rangle$ és $\langle b_1, \dots, b_k, b_{k+1} \rangle$ ugyanaz az altér, és $\|b\|$ a v pont *távolsága* a $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ altértől.

1. Határozzuk meg az alábbi két pontpár távolságát: $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 1)$; $(1, 1, i)$ és $(0, i, 1)$. Számítsuk ki az első két vektor szögét és a második két vektor skaláris szorzatát is.
2. Igazoljuk, hogy $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ és $b_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$ ONB \mathbb{C}^2 -ben is. Adjuk meg ebben $(1, 2)$ és $(1, i)$ koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.
3. Bizonyítsuk be tetszőleges valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításáról van szó? Melyek igazak komplex felett is?
 - (1) $x \perp z \iff \|x + z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$.
 - (2) $\|x\| = \|z\| \iff x + z \perp x - z$.
 - (3) $\|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2$.
4. Legyen α_n , illetve β_n az a szög, amelyet az n -dimenziós egységkocka testátlója egy éllel, illetve egy $(n - 1)$ -dimenziós lappal bezár. Számítsuk ki α_4 , β_4 és $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ értékét.
5. Mennyi $a + 2b + 3c + 4d$ maximuma, ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$?
6. Legyen W a térben az $x + y - z = 0$ egyenletű sík. Adjunk meg W -ben a Gram-Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.
7. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-től.
8. Legyen $U \leq \mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U -ban egy ONB-t, határozzuk meg U^\perp elemeit, végül írjuk fel az $(1, 0, 0, 0)$ vektort egy U -beli és egy U^\perp -beli vektor összegeként.
9. Igazoljuk, hogy ha b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ONB, akkor $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle^\perp = \langle b_4, b_5 \rangle$.

10. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T A u$ szorzatot.

11. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy , $x^2 - 2xy + y^2$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 - 3xy + y^2$, $x^2 + xy$, $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$, $xy + yz$, $xy + yz + xz$, $-x^2 + 2xy + 2xz$.

12. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)?

13. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ és $v^T = (y_1, y_2, y_3)$. Számítsuk ki az $u^* A v$ mátrix-szorzatot, továbbá a $\langle A^* u, v \rangle$ és $\langle u, A v \rangle$ skaláris szorzatokat.

$B = A^*$ pontosan akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v \rangle = \langle u, Bv \rangle$. Az A^* mátrixa (ortonormált bázisban) az A mátrixának transzponáltja \mathbb{R} felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja \mathbb{C} felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése:

	\mathbb{R}	\mathbb{C}
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció pontosan akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzártartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy \mathbb{C} feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha normális. Egy \mathbb{R} feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha szimmetrikus (ez a *főtengelytétel*). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

14. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

15. A \mathbb{C}^4 alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad C \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{bmatrix}, \quad E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 - u_4 \\ u_4 - u_1 \end{bmatrix}.$$

16. Tekintsük \mathbb{R}^4 -en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)/2 \\ (u_1 - u_2 - u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 - u_3 - u_4)/2 \end{bmatrix}, \quad H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_3 + u_4 \\ u_3 - u_4 \end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusokhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisokhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ± 1 -et tartalmazó blokkokra bomlik.