Bsc algebra2 gyakorlat

Ötödik feladatsor (2013 tavasz, 5. és 6. prezentáció)

1. Határozzuk meg a 4. feladatsor első feladatában szereplő mátrixok és transzformációk; egy általános diagonális mátrix; valamint az alábbi mátrixok minimálpolinomját, rangját és Jordan-alakját. Az utolsó sor mátrixai közül melyek hasonlók?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Hogyan látszik a minimálpolinomról, hogy a transzformációnak létezik inverze?

3. Van-e olyan mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$ és a minimálpolinomja (*a*) $x^2 - x$; (*b*) $x^3 - x$; (*c*) $x^4 - x^2$?

4. *(*)* Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.

5. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet. Igazoljuk, hogy ha $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, akkor $M^{2011} = 0 \implies M^2 = 0$. Igaz ez $\mathbb{Q}^{3\times 3}$-ban is?

6. *(*)* Legyen A egy $n \times n$-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n = 0$. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?

7. Mutassuk meg, hogy ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $M^k = E$, akkor M diagonalizálható.

8. Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M-nek.

---

9. Határozzuk meg $\{x-1,\ x^2-3x+2,\ x^2-6x+5\}$ és $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$, valamint az 1. feladatsor **4.** feladatában szereplő vektorrendszerek rangját.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.

11. *(*)* Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 13×21-es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak." Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulnia?

A sárkány a királylány húgához is bement. „Neked egy 8 rangú 8×8-as M mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát M-et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak." A királylány húga életben maradt-e?

Explicit képlet a Fibonacci-sorozatra

Azt a megoldást mutatjuk meg, amely a mátrix diagonalizálásának hasznosságát mutatja (lásd 4. feladatsor, **9.** feladat). A Fibonacci-sorozatot definiáló rekurzió $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Legyen

$$v_k = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix}.$$

A sorozatot megadó rekurzió mátrixszorzássá írható át:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad v_{k+1} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_k\,.$$

Az itt szereplő mátrixot M-mel jelölve tehát $v_{k+1} = Mv_k = M^2 v_{k-1} = \cdots = M^k v_1$. Így elegendő az M mátrix hatványaira explicit képletet adni. Ehhez M-et bázistranszformációval diagonális alakra hozzuk. Az M karakterisztikus polinomja

$$k(x) = \left| \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \right| = x^2 - x - 1\,.$$

Ennek gyökei, vagyis M sajátértékei

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(melyekre tehát $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ és $\lambda_1\lambda_2 = -1$). A megfelelő sajátvektorokat egy mátrix oszlopaiba írva kapjuk a diagonalizálást elvégző bázistranszformáció mátrixát:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D\,.$$

Innen $D^k = S^{-1}MSS^{-1}MS \ldots S^{-1}MS = S^{-1}M^kS$, tehát $M^k = SD^kS^{-1}$. Diagonális mátrixot elemenként lehet hatványozni, így az inverz mátrix képletét felhasználva M^k-ra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 & -\lambda_1^k + \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1}\lambda_2 - \lambda_2^{k+1}\lambda_1 & -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

adódik. A $v_k = Mv_1$ összefüggésből tehát

$$a_k = -(\lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 - \lambda_1^k + \lambda_2^k)/\sqrt{5}\,.$$

Ezt még tovább alakíthatjuk a $\lambda_1\lambda_2 = -1$ és a $\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$ felhasználásával (utóbbi azért igaz, mert $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$). A végeredmény:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right).$$

A Fibonacci-sorozat tehát exponenciálisan nő. A kivonandó nullához tart, és így a_k az $\left(\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{k+1}\right)/\sqrt{5}$-höz legközelebbi egész szám lesz.