

Bsc algebra2 gyakorlat

Negyedik feladatsor (2013 tavasz, 4. előadás)

1. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját.

(a) Az alábbi mátrixok \mathbb{R} illetve \mathbb{C} felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az utolsó három mátrix n -edik hatványát.

- (b) A vektortér a sík \mathbb{R} felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.
(c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

2. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós (**geometriai** multiplicitás), akkor λ legalább k -szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak (**algebrai** multiplicitás). Vizsgáljuk meg az 1. feladat mátrixai esetében, hogy mikor teljesül egyenlőség.

3. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P -re tükröz.

4. Az M négyzetes mátrix nyoma a főátló elemeinek összege, jele $\text{tr}(M)$ (trace). Igazoljuk:

- (1) MN és NM nyoma egyenlő, és ha M invertálható, akkor $\text{tr}(M^{-1}NM) = \text{tr}(N)$.
(2) Ha $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$, akkor $MN - NM$ nem az egységmátrix.

5. Legyen $k_M(x) = \det(M - xE)$ az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezőző alakja $c(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ (ahol $c, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). Igazoljuk:

- (1) A $k_M(x)$ tényleg n -edfokú polinom, és a főegyüttható $c = (-1)^n$.
(2) Az M sajátértékeinek összege az M nyoma, pontosabban $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(M)$ (azaz a sajátértékeket az algebrai multiplicitásukkal kell venni). Ez a szám a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$ -szerese.
(3) Az M sajátértékeinek szorzata $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(M)$, ami k_M konstans tagja.

6. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?

7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha u sajátvektora A -nak, és B -nek, akkor $A + B$ -nek is.
(b) Ha λ sajátértéke A -nak, és B -nek, akkor $A + B$ -nek is.
(c) Két sajátvektor összege is sajátvektor.
(d) Ha λ sajátértéke A -nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2 -nek.
(e) Ha λ^2 sajátértéke A^2 -nek, akkor λ sajátértéke A -nak.
(f) Ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor 0 sajátértéke A -nak.

8. (*) Igazoljuk, hogy $A \in \text{Hom}(V)$ pont akkor diagonalizálható, ha a sajátalterek összege V .

9. Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

- (1) $a_0 = a_1 = 1, a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ (Fibonacci-sorozat).
(2) $a_0 = 5, a_1 = 6, a_2 = 10, a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.
(3) $a_0 = 1, b_0 = 1, a_{k+1} = 2a_k + b_k, b_{k+1} = 2b_k - a_k$ ($k \geq 0$).