

Bsc algebra2 gyakorlat

Harmadik feladatsor (2013 tavasz, 3. és 4. előadás)

1. LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA

1. Az alábbi $A : V_1 \rightarrow V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott határozzuk meg a leképezés kép- és magterét, ezek dimenzióját, és írjuk föl a leképezés mátrixát alkalmas bázisban. A (g) pont esetében a mátrixot csak az origó körüli 90 fokos forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$ bázisban.

- $V_1 = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a \mathbb{C} felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás; a konjugálás; az abszolút érték képzése.
- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az \mathbb{R} felett, $A(M) = M^T$, illetve $A(M) = M^2$.
- $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, $A(f) = f(i)$, illetve $A(f)$ az f nem nulla együtthatóinak összege; szorzata.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n -edfokú elemei az \mathbb{R} felett, $A(f) = f'$ (derivált).
- V_1 és V_2 a sík \mathbb{R} felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés.

2. Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Az A transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázis-transzformáció képletét felhasználva az A mátrixát az $(1, 1)$, $(1, 2)$ bázisban, továbbá a $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$ bázisban is.

4. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M , mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

5. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.

2. MŰVELETEK LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK KÖZÖTT

6. Tekintsük az alábbi transzformációkat a síkon: T az $y = x$ egyenesre tükrözés, F az origó körüli $+90$ fokos forgatás, X , illetve Y az x -tengelyre, illetve az y -tengelyre vetítés.

- Számítsuk ki, hová viszi az $F + T$ transzformáció az (x, y) pontot.
- Melyik transzformáció lesz $X + Y$, XY , F^{2011} , T^{2011} , FT , TF ?
- Lineárisan függetlenek-e a T , F , FT , TF transzformációk?
- Hány dimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?

7. Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettős valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.
8. Legyen $A, B, C \in \text{Hom}(V)$ és λ skalár. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.
- (a) $A + B$, λA és AB lineáris, $(-A) + A = 0$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- (b) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$, $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
9. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1, 1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.
10. Egy vektortérben található 2011 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?

3. MAGTÉR, KÉPTÉR

11. Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Az alábbi $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ leképezések közül a lineárisaknak határozzuk meg a mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ képe } \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + z \\ 4x + 2y + z \\ y + z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

13. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altére. Igazoljuk, hogy V -nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, és olyan is, amelynek W a képtere. Mikor van olyan transzformáció, amelynek W **egyszerre** a magtere és a képtere?
14. Igazoljuk, hogy $AB = 0$ akkor és csak akkor, ha $\text{Im}(B) \subseteq \text{Ker}(A)$.
15. Mi az összefüggés A , B és AB magterei, illetve képterei között?
16. (*) Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \rightarrow V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\text{Im}(A^2) = \text{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?
17. Egy $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezés magtere 100-dimenziós, és $v_1, \dots, v_{199} \in V$ független vektorok. Legalább hány különböző van az $A(v_1), \dots, A(v_n)$ vektorok között?
18. Legyen $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$. Melyek igazak?
- (a) $\text{Ker}(A) = V_1 \implies \text{Im}(A) = \{0\}$.
- (b) $\text{Ker}(A) = \{0\} \implies \text{Im}(A) = V_2$.
- (c) $\text{Im}(A) = V_2 \implies \text{Ker}(A) = \{0\}$.
- (d) Ha egy X vektorrendszer képe generátorrendszer, akkor X is az.
- (e) Ha egy X vektorrendszer képe független, akkor X is az.
- (f) Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
- (g) Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
- (h) Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
- (i) Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.