

1. Interpoláció

Az interpoláció alaproblémája

Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely *előre megadott helyeken előre megadott értékeket* vesz fel.

A *helyek*: páronként különböző a_1, a_2, \dots, a_n számok.

Az *értékek*: tetszőleges b_1, b_2, \dots, b_n számok.

Azt szeretnénk: $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$.

Az interpoláció tétele

Mindig pontosan egy ilyen f polinom van a legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

Egyértelműség (K2.4.10)

Ha f és g ilyen polinomok, akkor n helyen megegyeznek, így a polinomok azonosági tétele miatt egyenlők. \square

Az interpolációs polinom létezése

Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet: $\ell_1(a_1) = 1, \ell_1(a_2) = 0, \dots, \ell_1(a_n) = 0$. Az ℓ_1 polinomnak tehát a_2, \dots, a_n gyöke. Ezért legyen $\ell_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$, ahol $c \in \mathbb{C}$. A c értékét az a_1 behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$\ell_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik $\ell_j(x)$ minden $2 \leq j \leq n$ -re, melyre $\ell_j(a_j) = 1$, és a többi a_k gyöke ℓ_j -nek (ha $k \neq j$).

Jó lesz: $f(x) = b_1 \ell_1(x) + b_2 \ell_2(x) + \dots + b_n \ell_n(x)$.

Például $f(a_1) = b_1 \ell_1(a_1) + b_2 \ell_2(a_1) + \dots + b_n \ell_n(a_1) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_n \cdot 0 = b_1$.

Hasonlóan látható, hogy $f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$. \square

Newton-interpoláció

A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzelnék, hogy a b_1, \dots, b_n számok *mérési eredmények*.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$.

Keletkezik egy új mérési eredmény: az a_{n+1} helyen b_{n+1} . Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást. A megoldás: a *Newton-interpoláció*. Az a_1, \dots, a_n helyeken megfelelő f polinomhoz egy

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá. Ez nem rontja el az a_1, \dots, a_n helyeken felvett értékeket. A c -t úgy választjuk, hogy az $f + g$ az a_{n+1} helyen is jó legyen. A részleteket lásd: K2.4.13. Gyakorlat.

2. A gyökök és együtthatók összefüggése

A gyöktényező alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden n -edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ alakban, ahol $c \neq 0$ az f főegyütthatója. Ez az f polinom *gyöktényező alakja*.

Besorzás másodfokú polinomokra

Legyen $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$.

De $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$.

Tehát $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$.

Ezért $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$ és $a_2b_1b_2 = a_0$.

Innen $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$ és $b_1b_2 = a_0/a_2$.

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 2$.

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

A harmadfokú polinomok esete

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$.

Mi lesz $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ beszorzott alakja? Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az x -et vesszük ki: x^3 .

Ha két zárójelből vesszünk ki x -et, akkor 3 tag keletkezik: $-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2$.

Ha egy zárójelből vesszünk ki x -et: $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$.

Végül ha egyik zárójelből sem az x -et vesszük ki: $-b_1b_2b_3$.

$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$. Így

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3.$$

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 3$.

A négyzetösszeg

Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$ Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal. b_1^2, b_2^2, b_3^2 egyszer, b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3 mind kétszer keletkezik. Például b_2b_3 úgy is, mint b_3b_2 . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25.$$

Az általános eset

Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

σ_k úgy keletkezik, hogy k darab különböző b_i -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk.

Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk. x^{n-k} -s tag úgy keletkezik, hogy $n - k$ zárójelből x -et, a többi k zárójelből valamelyik $-b_j$ -t vesszük ki. Ezért x^{n-k} együtthatója $(-1)^k \sigma_k$ lesz. \square

A gyökök és együtthatók összefüggése

Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$: az összes lehetséges módon összeszorozunk k különbözőt b_1, \dots, b_n közül, ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk. (Megállapodás: $\sigma_0 = 1$ és $\sigma_k = 0$ ha $k > n$.) Elnevezés: *elemi szimmetrikus polinom*. Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

Tétel (K2.5.9)

Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_n (x - b_1) \dots (x - b_n)$. Ekkor $0 \leq k \leq n$ esetén $a_k = a_n (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$, így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n.$$

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*.

Az $(x - b_1) \dots (x - b_n)$ beszorzott alakjából következik.

Alkalmazás: az egységgyökök összege

Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ az n -edik egységgyökök.

Valóban, mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$ -nek. Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában. De $x^n - 1$ foka n , és így legfeljebb n gyöke lehet. Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök. Az $x^n - 1$ főegyütthatója 1, ezért $c = 1$ -gyel kell szorozni. \square

Következmény

Az n -edik egységgyökök összege nulla, ha $n > 1$, mert ekkor $x^n - 1$ -ben x^{n-1} együtthatója $a_{n-1} = 0$.

$$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1, \dots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1} / a_n.$$

3. Többhatározatlanú polinomok

A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

Meta-definíció

Többhatározatlanú polinomnak nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az x_1, x_2, \dots, x_n *határozatlanokból* (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$ egy kéthatározatlanú polinom. A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk. Az eredmény: $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$.

Definíció-kísérlet

$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, ahol $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} \in \mathbb{C}$.

Kényelmesebb a következő:

A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$. Rendezzük x_2 szerint:
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$. Ez x_2 -nek másodfokú polinomja, ahol az *együtthatók* x_1 -nek *polinomjai*.

Definíció (K2.6.1)

Az x_1 és x_2 határozatlanok polinomjának nevezzük az

$f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$ formális kifejezéseket, ahol $m \geq 0$ egész, és $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$ az x_1 polinomjai.

Általában az x_1, x_2, \dots, x_n polinomjai az $f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$ formális kifejezések, ahol $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ (*rekurzív definíció*).

Ezek halmazát $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ jelöli.

Példák: $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$, sőt, $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$, mert minden együttható egész. Ugyanígy $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$.

Összeadás, kivonás, szorzás

Az n -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát *ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét*, de most az együtthatók $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ elemei.

Definíció

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m \\ g &= b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m. \end{aligned}$$

E polinomok *összege* és *különbsége*:

$$\begin{aligned} (f + g) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m \\ (f - g) &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \dots + (a_m - b_m)x_n^m. \end{aligned}$$

Szorzás:

$(a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m)$ $(b_0 + b_1x_n + \dots + b_\ell x_n^\ell)$ -ben x_n^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$.

Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nullosztómentes:

$fg = 0$ csak akkor teljesül, ha $f = 0$ vagy $g = 0$.

Bizonyítás (vázlat)

n szerinti teljes indukcióval. $n = 1$ -re tudjuk. Ha $f \neq 0 \neq g$:

$f = a_0 + \dots + a_mx_n^m$ ($a_k \neq 0$), $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$ ($b_\ell \neq 0$).

Itt $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$. $fg = a_mb_\ell x_n^{m+\ell} + \dots$ (ahogy az egyváltozós esetben). Az indukciós feltevés miatt $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ nullosztómentes, ezért $a_mb_\ell \neq 0$, így $fg \neq 0$. \square

Fokszám

Definíció

Legyen $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$.

Az $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ tag foka $m_1 + \dots + m_n$. Az f foka a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb. Jelölés: $\text{gr}(f)$.

Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ foka 4: $\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$, de $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$.

Fontos: Az x_2 polinomjaként írva

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Ennek foka 2 és *nem* $\text{gr}(f) = 4$.

Szorzat foka

Definíció

Egy polinom *homogén k -adfokú*, ha minden tagjának foka k .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:

$f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, ahol $n = \text{gr}(f)$.

Az f_j az f polinom j -edfokú tagjaiból áll.

Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$.

Házi feladat (K2.6.2.)

Egy $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ polinomnak pontosan akkor van reciproka a $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ polinomjai között, ha nem nulla konstans (azaz foka nulla).

4. A harmad- és negyedfokú egyenlet

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$. Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát *négyzetgyökvonásra vezettük vissza*.
- (3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.
- (4) Ha $p^2/4 - q = 0$, akkor egy megoldás van, amely az $y^2 + py + q$ polinomnak kétszeres gyöke.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$). Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az *általános harmadfokú egyenlet*.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést. Kiesik az x^2 -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték. A most következő ötletet *Scipione del Ferro* és *Niccolo Tartaglia* fedezte fel, 1530 körül.

A megoldás ötlete

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$. Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$, AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek. Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei a $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. Így

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

- (1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.
- (2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.
- (3) Az f -nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ kifejezés nulla.

Bizonyítás: K, 3.8. Szakasz.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökköszörősei.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) = x^3 - 21x + 20$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke *valós*, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a *Casus Irreducibilis*. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben *semmilyen más, valóságban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!* (A Casus Irreducibilis Tétele, K6.10.2).

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$). Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az *általános negyedfokú egyenlet*.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4 -gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3 -ös tag.

Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható. Ezért az összes gyök megkapható az együtthatókból a négy alapművelet és gyökkvonás segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az *általános* n -edfokú egyenletre *nem létezik* olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökkvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a *Galois-elmélet* eredményei.

Felfedezők: *Niels Henrik Abel, Evariste Galois* (1830 körül). Ezt az Algebra3-4 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet). A Galois-elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés) nem végezhetők el körzővel és vonalzóval.

5. Összefoglaló

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Interpolációs polinom. A σ_k elemi szimmetrikus polinomok. Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció. A gyökök és együtt-hatók összefüggése (Viète-formulák). A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal. Az $x^n - 1$ gyöktényezős alakja, az n -edik egységgyökök összege. Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között. Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka. Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja, a többszörös gyökök létezésének leolvasása. A Casus Irreducibilis jelensége és tétele. A magasabb fokú egyenletek nem megoldhatósága gyökjelekkel.