1. A kétszer kettes determináns

2×2-es mátrix inverze

Tétel
Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ *inverze* $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás
$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$.
Ezt $ad - bc$-vel osztva az egységmátrixot kapjuk.
<u>HF:</u> Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is. □

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció
Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M *determinánsa.*

Lemma
$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás
$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$.
$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.
$\det(M)\det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c')$.
<u>HF:</u> Mindkettő $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$. □

Amikor nincs inverz

Előző tétel
Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek *nincs inverze.*

A tétel bizonyításának befejezése
Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.
$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$.
Ezért $\det(M)$ sem lehet nulla. □

A determináns lineáris

Állítás
$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$.
$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.
Azaz a determináns az első oszlopában *lineáris* (összegtartó, és skalárszorostartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke
$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+(a'd-b'c)$. Ezek egyenlők.
A skalárszoros-tartás bizonyítása hasonló. □

Oszlopok egyenlősége

Állítás
Ha a mátrix *két oszlopa egyenlő*, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$ □

Definíció
Az M *felső háromszögmátrix*, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A linearitás következménye

Állítás
Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás
Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De $\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$, mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó. Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.
Ezért $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$. □

Oszlopcsere

Állítás
A két oszlop cseréjénél a determináns *előjelet vált.*

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$

$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$ $\square$

Második bizonyítás
$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$
$= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w].$ $\square$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.
A második oszlopból kivonjuk az elsőt.
Az első oszlophoz hozáadjuk a másodikat.
Kiemelünk -1-et a második oszlopból.

A transzponált determinánsa

Állítás
A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$ $\square$

Állítás
Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, *számolás nélkül* következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált.

Sorcsere

Állítás
Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás
Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix. Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból. Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált, azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$. Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik, azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. $\square$

<u>HF:</u> Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

2. A háromszor hármas determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel
3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A Sarrus-szabály

Tétel
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & \underline{a_{32}} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ \underline{a_{31}} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & \underline{a_{12}} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára. A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

3. Az általános determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Definíció
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege. A képlet legközelebb, *permutációk előjelének* felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.
A (8)-ról ma lesz szó *aldeterminánsok* felhasználásával.

A determináns kiszámítása

Eljárás
Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az *alatta* lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa
Karikázás helyett a megfelelő számok *piros* színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az első két oszlopot megcseréljük.
A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.
Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Az első két oszlopot megcseréljük.
A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.
<u>HF:</u> Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)
Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat
Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$. Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét. Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla. Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla. Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Tehát ebből a sorból ki tudtuk vonni a többi sor alkalmas skalárszorosát úgy, hogy csupa nulla sort kapjunk. $\square$

4. A determináns kifejtése

Előjeles aldeterminánsok

Definíció
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó M_{ij} *előjeles aldeterminánst* a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix *determinánsát*
- megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a *sakktáblaszabály*:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk. *Ekkor M determinánsát kapjuk.* Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re. Ugyanez sorokra is érvényes: $a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy *másik oszlophoz* tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény *nulla* lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Sorokra:
$a_{j1}M_{k1} + a_{j2}M_{k2} + \ldots + a_{jn}M_{kn} = 0$ minden $j \neq k$-ra.

Példa kifejtésre

Példa
A harmadik oszlop szerint:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$
Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint, így 0.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása
Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

FONTOS!
Gauss-eliminációval *SOKKAL* gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$-ra 108.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)
Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az *inverz képlete* $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$. Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, *transzponáljuk*, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.
Megfordítva: A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF). □

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)
$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$. Azaz *minden jobbinverz balinverz is.*

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$. Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$. Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$. Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. □

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével. Így *a kétoldali inverz egyértelmű.*

5. A Cramer-szabály

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)
Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n\times n}$. Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$. Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)
Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás
$x_j = \dfrac{\det(M_j)}{\det(M)}$.

Példa a Cramer-szabályra

Példa
$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás
Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre. Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$. Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1v_1 + x_2v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1v_1 + x_2v_2, v_2] = \det[x_1v_1, v_2] + \det[x_2v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

$M_1 = [b, v_2]$ és $x_1v_1 + x_2v_2 = b$
Az első oszlopot összegre bontjuk.
Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.
$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.

6. Összefoglaló

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
A 2×2-es és 3×3-as determináns. Előjeles aldetermináns.

Tételek
A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa. A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns. Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete. Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz. A determináns eltűnésének jellemzése. A Cramer-szabály.