1. Gyökvonás komplex számból

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:
Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

<u>Moivre képlete:</u> $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$. Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,
akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa
$z = -4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.
$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$. Tovább?

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja. Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ \ -1+i,\ \ -1-i,\ \ 1-i.$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)
Minden nem nulla komplex számnak n *darab* n-edik gyöke van.

Bizonyítás
$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big)\ (k \in \mathbb{Z})$

Ha $m - k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$\frac{\pi + 2m\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} + \ell \cdot 2\pi.$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít. □

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)
Ha $m - k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való *eltolás*.

Állítás (K1.4.5)
Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) *forgatva nyújtás*: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

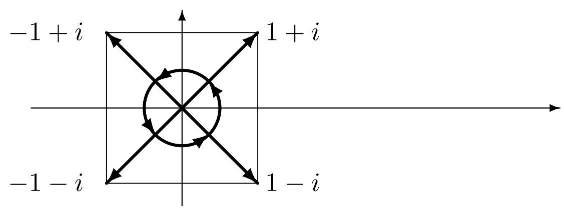
Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja. □

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Ezek egy *négyzet* négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



Bizonyítás
$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$. Hasonlóan $i(-1+i) = -1-i$, $i(-1-i) = 1-i$, $i(1-i) = 1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)
Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei *szabályos n-szöget* alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás
Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\Big)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}$.

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög. □

2. Komplex egységgyökök

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)
Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

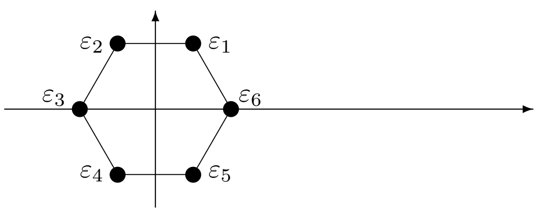
$1 = 1(\cos 0° + i \sin 0°)$

$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\Big)$ $(k \in \mathbb{Z})$

Példa
A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \;=\; 0 + 1i \;=\; i.$
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) \;=\; -1 + 0i \;=\; -1.$
$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) \;=\; 0 - 1i \;=\; -i.$
$\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) \;=\; 1 + 0i \;=\; 1.$

A hatodik egységgyökök

Példa
A hatodik egységgyökök a következők.
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$
$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás
Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai. A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)
Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke, akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke. Vagyis w_0-*t végig kell szorozni az* n*-edik egységgyökökkel.*

Bizonyítás
$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor, ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon$, akkor $w = \varepsilon w_0$.

3. Komplex szám rendje

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb. *Négyesével* periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít. Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$. Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)
A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *rendje* az egész kitevős hatványainak a száma. Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2, \quad o(i) = 4, \quad o(-i) = 4$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)
Az n egész szám *jó kitevője* a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)
Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. $\square$

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív, ezért z-nek van *pozitív* jó kitevője is.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)
Legyen d a z *legkisebb pozitív* jó kitevője. Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás
Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor $1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$. Tehát r is jó kitevő. A d a *legkisebb pozitív* jó kitevő. Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$. De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek. Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$, azaz n jó kitevő. $\square$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)
Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *legkisebb pozitív* jó kitevője d. Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:
Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző. Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$. (Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.) Tehát z különböző hatványainak a száma d. Azaz z rendje d, és a hatványok periódikusan ismétlődnek. $\square$

4. Hatvány rendjének képlete

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre. Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz? Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$	$k/(n,k)$	$n/(n,k)$

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)
A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, m.$$

A *legkisebb* ilyen m maga az $n/(n,k)$. Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n, ezért a megtett körök száma a megtett távolság n-edrésze, vagyis $k/(n,k)$. $\square$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z),k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n,k)$-adik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k-nak az $n/(n,k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \dfrac{4}{(4,3)} = 4$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π *racionális* többszöröse. Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. *Így* $(k,n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n,k)$. Mivel $(n,k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$. $\square$

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n,k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336° + i\sin 336°$ rendje?

Megoldás

$\cos 336° + i\sin 336°$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1°$, ami $336/360 \cdot 2\pi$. $336/360$ racionális szám, így z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i\sin(14 \cdot 2\pi/15)$. Mivel $(14,15) = 1$, ezért z rendje a fenti állítás miatt 15. $\square$

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)
Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z *egységgyök*, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z *rendje*, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z *jó kitevői* azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.
- A z akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek *racionális* többszöröse; $o(z)$ ezen egyszerűsíthetetlen tört nevezője.

5. Primitív egységgyökök

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)
Az ε szám *primitív n-edik egységgyök*, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)
Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető
Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n. Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell. Így (2) $\iff$ (3).

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:
Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás
(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az: $\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1$. Rendje n, tehát n hatványa van. Így minden n-edik egységgyököt megkapunk. $\square$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ *Euler-függvény* a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel
Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor
$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás (K1.5.13)
A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás
A primitív n-edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.
Láttuk: $\varepsilon_k = \varepsilon_\ell \iff n \mid k - \ell$. $\square$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa
A *negyedik* primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa
A *hatodik* primitív egységgyökök
$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$
$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i\sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-könyv 1.5. Szakaszát.

6. Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)
Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak *van* gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs
A tétel bizonyításához az *analízis* eszközei szükségesek. Harmadéven: bizonyítás *komplex függvénytan* segítségével. Másodéven: *bizonyítás Galois-elmélet* segítségével. Felhasznált segédtétel:

Tétel
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis *Bolzano-tételével*, de következik az algebra alaptételéből is (később).

7. Összefoglaló

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3). Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6). Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek
Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2). Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4). Komplex szám hatványainak egyenlősége, a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8). A hatvány rendjének képlete (K1.5.10). A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11). A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13). Az algebra alaptétele (K2.5.4).