1. A Horner-elrendezés

A polinomok műveleti tulajdonságai
Polinomokkal a „szokásos" módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)
Tetszőleges f, g, h polinomokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $f+g = g+f$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $f+0 = 0+f = f$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a *nullelem*).

(4) Minden f-nek van *ellentettje*.

(5) $(fg)h = f(gh)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $fg = gf$ (a szorzás kommutatív).

(7) $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$ (a konstans 1 polinom *egységelem*).

(8) $(f+g)h = fh + gh$ (*disztributivitás*).

Példa behelyettesítésre

Példa
Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x+2)x+0\big)x+1\Big)x+2$. Belülről kifelé:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big((3x^2 + 2x)x + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big((3x^2 + 2x + 0)x + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big(((3x+2)x + 0)x + 1\Big)x + 2.
\end{aligned}$$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	68

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
$3 \cdot 2 + 2 = 8$
$8 \cdot 2 + 0 = 16$
$16 \cdot 2 + 1 = 33$
$33 \cdot 2 + 2 = 68$

A Horner elrendezés (K2.4)

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

(4) Az $f^*(b)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}	$\ldots$ $\ldots$	c_j c_j	$c_j b + a_j =$ $= c_{j-1}$	$\ldots$ $\ldots$	c_0 c_0	$c_0 b + a_0 =$ $= f^*(b)$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)
Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \le j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.
Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x-b)q(x) + B$. A b-t behelyettesítve $f^*(b) = B$ (hiszen $x - b$ nullává válik). $\square$

2. A polinomok azonossági tétele

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (K2.4.7. Tétel)
Minden $0 \ne f \in \mathbb{R}[x]$ fölírható $f(x) = (x-b_1)\ldots(x-b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az *összes* $\mathbb{R}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{R}$-ben.

Bizonyítás
Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{R}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó. (Üres szorzat!)
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető). Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b-b_1)\dots(b-b_k)q^*(b) = 0$. A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re. Azaz $b = b_j$. □

A gyökök száma

Kérdés
Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x-b_1)+\dots+\mathrm{gr}(x-b_k)+\mathrm{gr}(q)= k+\mathrm{gr}(q)$ (hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \mathrm{gr}(f)$.

Következmény (K2.4.7)
Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

Házi feladat (K2.4.9)
Mutassuk meg, hogy egy $n > 0$ fokú polinom minden értéket legfeljebb n helyen vehet föl.

Az azonossági tétel

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)
Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor *egyenlők* (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás
Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$. □

Következmény (K2.4.11)
Ha az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Vagyis $\mathbb{R}$ fölött $f \mapsto f^*$ kölcsönösen egyértelmű.

3. Többszörös gyökök

A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az n-edfokú f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c konstans, akkor c az f főegyütthatója. Ez az f polinom *gyöktényezős alakja*.

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$$

Általában:
$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$, ahol a $d_1,\dots,d_m$ gyökök már *páronként különbözők*.

A k_i a d_i gyök *multiplicitása*. Azaz d_i egy *k_i-szoros gyök*.

Következmény (K, 63. oldal)
$\mathrm{gr}(f) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, vagyis az f polinomnak *multiplicitásokkal számolva* n darab gyöke van.

Többszörös gyökök

$f(x) = x^3-3x-2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$. Legyen $g(x) = x-2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Definíció (K2.5.5)
Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{R}$ szám *k-szoros gyöke* (vagyis a b gyök *multiplicitása* k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak b már nem gyöke.

Azaz $q(x)$-ből az $x - b$ gyöktényező már nem emelhető ki.

A többszörös gyökök sokszor meghatározhatók a *formális deriválás* módszerével (K3.6. szakasz). Ez csak az intenzív előadáson szerepel ebben a félévben.

4. A gyökök meghatározása

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)
$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ egész együtthatós polinom. *Ha* a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, *akkor* $p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és $q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás
$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt. Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0q^n$. A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek. Tehát $p \mid a_0q^n$-ből $p \mid a_0$ következik. Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a $q \mid a_n$ oszthatóságot is. $\square$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa
Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$ gyökeit.

Megoldás
Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid -3$ és $q \mid 4$. Ezért $p = \pm 1$ vagy ± 3 és $q = \pm 1$, ± 2 vagy ± 4. Így $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$.
Ezeket *végigpróbálgatva* kapjuk, hogy *csak* $-1/2$ racionális gyök.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$-nak *csak* $-1/2$ lehet racionális gyöke. Ez tényleg gyök:
$f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 - 12)$. Itt $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$.
Gyöktényezős alakja $f(x) = 4\big(x + (1/2)\big)^2 (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

5. A binomiális tétel

Binomiális együtthatók

Ismétlés
Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n *faktoriális*. Üres szorzat: $0! = 1$.

Ismétlés
Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „n alatt a k” *binomiális együttható*. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha $k > n$, vagy ha $k < 0$.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a + b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$, az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
$a^2 b$ úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.
Hasonlóan ab^2-ből is három darab lesz, b^3-ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.$

6. Összefoglaló

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Gyöktényezős alak (K2.5). Gyök multiplicitása (K2.5.5).

Tételek
A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6). A Horner-elrendezés (K2.4.4). Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7). Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7). A polinomok azonossági tétele (K2.4.10). Polinom és polinomfüggvény kapcsolata (K2.4.11). A racionális gyökteszt (K3.3.10). A binomiális tétel (K2.2.42).