

1. Bevezetés

A félév anyaga

- *Komplex számok*
 - Műveletek
 - Kapcsolat a geometriával
 - Gyökvonás
- *Polinomok*
 - A gyökök száma
 - A gyökök és együtthatók összefüggése
 - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
 - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- *Lineáris algebra*
 - Lineáris egyenletrendszerek
 - Műveletek vektorokkal és mátrixokkal
 - Determinánsok
- *Absztrakt algebrai alapfogalmak*
 - Gyűrűk és testek

Irodalom

- <http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/>
 - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
 - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
 - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
 - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- *K=Kiss Emil: Bevezetés az Algebrába*
www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook
 - Komplex számok, polinomok
 - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
 - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai

- *F=Freud Róbert: Lineáris algebra*
 - Az első három félév lineáris algebra anyaga
 - Feladatok megoldásokkal
- *További feladatgyűjtemények*
 - Fagyjev-Szominszkij: Felsőfokú algebrai feladatok
 - Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, ***nem jegyzetelni!***
 - Ez a prezentáció definiálja a vizsgakövetelményeket.
 - Nyomtatható változat is letölthető.
 - Hivatkozások a két tankönyvre, ahol magyarázatok vannak.
- *Az anyagot meg is kell érteni!*
 - a megértés az alkalmazás képessége;
 - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a könyvekben;
 - logikai szabatosság, a matematika nyelvének elsajátítása.
- *Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!* Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
 - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
 - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- *Használjuk a számítógépet!*
 - Account a cs.elte.hu-n.
 - Konzultációs gyorssegély: ewwkiss@gmail.com
 - T_EX, Maple, Mathematica, GAP.

A számonkérés módja

- *A gyakorlati jegy:*
 - Csak három hiányzás megengedett.
 - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
 - * az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
 - * az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
 - * a házi feladatokból.

- Két évfolyamzárthelyi;
 - * az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
 - * javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
 - * Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- *A vizsgajegy:*
 - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
 - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.
 - Beugró a röpdolgozatok anyagából.
 - Összesen három alkalom; egyre kell eljönni, kivéve ha az nem sikerül.

2. Polinomok

A polinom szemléletes fogalma

K2.1 (azaz Kiss: Algebra, 2.1. szakasz)

Polinomnak nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely számokból, és az x betűből készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével. Az x neve *határozatlan* (vagy *változó*).

Példa

$((4x - x^2)(x - 23) + 2x - 7)^2 + 43x^3 - \pi$ egy polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk, majd x hatványai szerint rendezhetünk. Az eredmény:

$x^6 - 54x^5 + 909x^4 - 4803x^3 - 7722x^2 + 1260x + 49 - \pi$. (MAPLE program!)

A polinom definíciója

Definíció

Egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és a_0, \dots, a_n számok. Az x neve *határozatlan*. Az a_jx^j a polinom egy *tagja*, az x^j *együtthatója* a_j . Az $a_0 = a_0x^0$ a *konstans tag*.

Definíció (K2.1.1)

Két polinom akkor *egyenlő*, ha együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$ -ra).

$x^2 - 1 = 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)$ és $x^3 - 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)$ nem egyenlők, mert például az x^3 együtthatója más a két polinomban.

A nullapolinom

Definíció (K2.1. szakasz)

A *nullapolinom* az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla. Ugyanúgy 0 jelöli, mint a 0 számot.

Minden c számot polinomnak tekintünk (amelyben x^j együtthatója nulla minden $j \geq 1$ esetén, konstans tagja pedig c). Ezek a *konstans* polinomok.

$\mathbb{R}[x]$: a *valós* együtthatós polinomok halmazának jele.

$\mathbb{Q}[x]$: a *raciónalis* együtthatós polinomok halmazának jele.

$\mathbb{Z}[x]$: az *egész* együtthatós polinomok halmazának jele.

A határozatlan jele más is lehet: $\mathbb{R}[y]$, $\mathbb{Z}[u]$.

Példa: $\pi y^2 + 3 \in \mathbb{R}[y]$, de $\pi y^2 + 3 \notin \mathbb{Q}[y]$.

3. Műveletek polinomok között

Polinomok kibővítése nulla tagokkal

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \\ & = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$. Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n. \end{aligned}$$

Példa

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 1 \\ x^3 + 1 &= 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1. \end{aligned}$$

Polinomok összege, különbsége, ellentettje

Definíció (K 35. oldal)

Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n. \end{aligned}$$

E polinomok összege és különbsége:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \\ (f - g)(x) &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n. \end{aligned}$$

Nilván $f + 0 = 0 + f = f$ minden f polinomra.

Az $f \in \mathbb{R}[x]$ ellentettje h , ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.

Az $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje

$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$.

A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Példa polinomok szorzatára

Kérdés

Hogyan definiáljuk az $(a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ szorzatot? Például mi legyen x^2 együtthatója?

Állítás (K2.1.4. Gyakorlat)

Az $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_m)$ eredménye az nm darab u_jv_ℓ tag összege ($1 \leq j \leq n$ és $1 \leq \ell \leq m$). A két zárójelből kivesszünk egy-egy tagot az összes lehetséges módon, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

x^2 -es tag kétféleképpen keletkezhet: $a_0(b_2x^2)$ és $(a_1x)(b_1x)$. Ezért x^2 együtthatója legyen $a_0b_2 + a_1b_1$. A végeredmény:

$$a_1b_2x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0.$$

Polinomok szorzatának definíciója

Definíció

$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)$ -ben

x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$.

Magyarázat

x^k -os tag akkor keletkezik $(a_jx^j)(b_\ell x^\ell)$ -ből, ha $j + \ell = k$.

Példa

Az x^{n+m} együtthatója

$$a_0b_{n+m} + \dots + a_{n-1}b_{m+1} + a_nb_m + a_{n+1}b_{m-1} + \dots + a_{n+m}b_0.$$

Tudjuk, hogy $\ell > m$ esetén $b_\ell = 0$. Így az első n tag nulla. Tudjuk, hogy $j > n$ esetén $a_j = 0$. Így az utolsó m tag nulla. Vagyis x^{n+m} együtthatója a_nb_m .

4. Polinomok foka

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n . Jele: $\text{gr}(f)$.

Tehát a fok a legnagyobb olyan kitevő, amelyhez tartozó együttható nem nulla.

A nullapolinomnak nincs foka. Az $f(x)$ k -adfokú tagja a_kx^k , főtagja a_nx^n , főegyütthatója a_n . Az $f(x)$ normált polinom, ha főegyütthatója 1.

Tétel (K2.1.5)

Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ esetén láttuk, hogy x^{n+m} együtthatója a_nb_m . Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla. Magasabb fokú tag nem keletkezik. \square

A szorzat foka: következmények**Következmények (K2.1.7)**

- (1) A polinomok szorzása *nullosztómentes*, azaz nem nulla polinomok szorzata sem a nullapolinom.
- (2) Egy f polinomnak pontosan akkor van *reciproka* polinomok között, ha nem nulla konstans polinom.

Bizonyítás

(1): Láttuk, hogy ha f és g nem nulla, akkor fg -nek van nem nulla együtthatója, így fg sem nulla.

(2): Ha $fg = 1$, akkor $0 = \text{gr}(1) = \text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$.

Ézért $\text{gr}(f) = \text{gr}(g) = 0$, azaz mindkettő nem nulla konstans.

Megfordítva, ha $c \neq 0$ konstans, akkor reciproka, azaz $1/c$ is (konstans) polinom.

HF: fg konstans tagja f és g konstans tagjainak szorzata.

Összeg foka**Tétel (K2.1.2)**

Két polinom összegének a foka legfeljebb akkora, mint a két polinom fokai közül a nem kisebb: $\text{gr}(f+g) \leq \max(\text{gr}(f), \text{gr}(g))$. Ha a két polinom foka különböző, akkor egyenlőség áll.

Példa

$$2 = \text{gr}(x^2 + 1) = \text{gr}(-x^2 + x) > \text{gr}((x^2 + 1) + (-x^2 + x)) = 1.$$

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$, ahol feltehetjük, hogy például a_n nem nulla, azaz $\text{gr}(f) = n$. Ha $b_n = 0$, akkor $\text{gr}(g) < n$, és $f+g$ főegyütthatója a_n , azaz $\text{gr}(f+g) = \text{gr}(f) = n$. Ha $b_n \neq 0$, akkor $\text{gr}(f) = \text{gr}(g) = n$. Ekkor $a_n + b_n = 0$ is lehet, mely esetben $\text{gr}(f+g) < \text{gr}(f) = \text{gr}(g)$.

5. A szumma és produktum jelölés

Összegek tömör alakja

Definíció

Az $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeget így rövidítjük: $\sum_{j=1}^n a_j$. A *szumma* jel utáni kifejezéseket kell összeadni a j azon értékeire, amit a jel alatt és fölött megadunk.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m = \sum_{\ell=0}^m b_\ell x^\ell$$

esetén $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$, ahol $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j+\ell=k} a_j b_\ell$.

A produktum jelölés

Definíció

A \prod produktum jelölés hasonló a szumma jelöléshez, csak összeadás helyett

szorozni kell. Példák: $\prod_{j=2}^n a_j = a_2 a_3 \dots a_n$.

$\prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ (n faktoriális).

Megállapodás

Egytagú összeg és szorzat az egyetlen tagjával egyenlő. Az *üres összeg* értéke 0.

Az *üres szorzat* értéke 1.

Példa: $\sum_{j=3}^3 b_j = b_3$, $\sum_{j=3}^2 b_j = 0$, $\sum_{j=1}^n a_j x^j = 0$, ha $n = 0$.

Magyarázat: K2.2.42. Gyakorlat.

6. Polinomfüggvény és gyök

Behelyettesítés polinomba

Definíció (K2.4.1)

Legyen b egy szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinom b helyen felvett helyettesítési értéke $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_nb^n$ (az x helyére b -t írunk). Az f -hez tartozó f^* polinomfüggvény az az f^* függvény, mely minden b számhoz $f^*(b)$ -t rendel.

Állítás (K2.4.2)

Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor $(f + g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$
és $(fg)^*(b) = f^*(b)g^*(b)$.

A polinomok összeadását és szorzását pontosan azzal a motivációval definiáltuk, hogy ez az állítás igaz legyen.

A gyök és a gyöktényező

Definíció (K2.4.5)

A b szám *gyöke* az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$.

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége, K2.4.6)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Az $x - b$ a b gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x - b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b - b)q^*(b) = 0$.

A megfordítást legközelebb bizonyítjuk.

HF: Vezessük le ezt a megfordítást az $a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i$ azonosságából.

7. Összefoglaló

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K2.1)

Határozatlan; polinomok, egyenlőségük (K2.1.1). Tag, együttható, főtag, normált polinom, fok, konstans tag. Nullapolinom, összeg, ellentett, szorzat. Polinomfüggvény (K2.4.1), polinom gyöke (K2.4.5). Nullosztómentesség (K2.2.27). A szumma és produktum jelölés.

Tételek

Összeg és szorzat foka (K2.1.2, K2.1.5). Polinomfüggvények összege és szorzata (K2.4.2). Gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6).