Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

9. előadás

Egész számok osztása

Példa

$$223 \;:\; 7 = \boxed{}$$

$$\boxed{}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{}$$

$$\boxed{}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{3\ }$$

$$\boxed{}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{3\ }$$

$$\underline{\qquad\quad}$$

$$\overline{\boxed{}}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = & \boxed{3\ } \\ 21 & \\ \hline & \\ \hline \square & \end{array}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 : 7 = \boxed{3\ \ } \\ 21 \\ \hline \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 : 7 = \boxed{3\ \ } \\
-\,21 \\
\hline
\\
\overline{}\\
\boxed{}
\end{array}
$$

Kivonunk

Egészszámok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r l}
223 : 7 = & \boxed{3\ } \\
-\,21 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

$$\boxed{}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 \;:\; 7 = \boxed{3\;\;} \\ -\,21 \\ \hline 13 \\ \\ \overline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 \;:\; 7 = \boxed{31} \\
-\,21 \\
\hline
13
\end{array}
$$

$$\overline{}$$

$$\boxed{}$$

Egészszámok osztása

Példa

$$\begin{array}{r}
223 : 7 = \boxed{31} \\
-\;21 \\
\hline
13 \\
\\
\overline{} \\
\boxed{}
\end{array}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r l}
223 : 7 = & \boxed{31} \\
-\,21 & \\
\hline
13 & \\
7 & \\
\hline
\boxed{} &
\end{array}
$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = & \boxed{31} \\ -\,21 & \\ \hline 13 & \\ 7 & \\ \hline \boxed{} & \end{array}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 \;:\; 7 = \boxed{31} \\
-\,21\phantom{3 \;:\; 7 = \boxed{31}} \\
\hline
13\phantom{\;:\; 7 = \boxed{31}} \\
-\,7\phantom{\;:\; 7 = \boxed{31}} \\
\hline
\boxed{}\phantom{\;:\; 7 = \boxed{31}}
\end{array}
$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 \; : \; 7 = \boxed{31} \\
-\,21 \\
\hline
13 \\
-\,7 \\
\hline
\boxed{6}
\end{array}
$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = \boxed{31} \\ -\,21 & \\ \hline 13 & \\ -\,7 & \\ \hline \boxed{6} & \end{array}$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6$.

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = \boxed{31} \\ -\,21 & \\ \hline 13 & \\ -\,7 & \\ \hline \boxed{6} & \end{array}$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6$.

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$,

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 : 7 = \boxed{31} \\ -21 \\ \hline 13 \\ -7 \\ \hline \boxed{6} \end{array}$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6$.

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = bq + r$

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = & \boxed{31} \\ -21 & \\ \hline 13 & \\ -7 & \\ \hline \boxed{6} & \end{array}$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6.$

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = bq + r$ és $|r| < |b|$.

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

Főtagokat elosztjuk: $(2x^3)/x^2 = 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x \quad}$$

Főtagokat elosztjuk: $(2x^3)/x^2 = 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x \quad}$$

Visszaszorzunk: $(2x)(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x} \\
\underline{(2x^3 + 0 + 2x)}
\end{array}
$$

$$\boxed{}$$

Visszaszorzunk: $(2x)(x^2+1) = 2x^3 + 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = \boxed{2x \quad} \\
\underline{(2x^3 + 0 + 2x)} \\
\\
\underline{\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad \boxed{}
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = & \boxed{2x \quad} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
\\
\hline
\boxed{} &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x \quad\quad} \\
- & (2x^3 + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + x & + 2 & \\
\hline
 & & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & +\ 2x^2 & +\ 3x & +\ 2) & :\ (x^2+1) = \boxed{2x\quad} \\
-\,(2x^3 & +\ 0 & +\ 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & +\ x & +\ 2 & \\
\hline
 & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = & \boxed{2x \quad} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
 & \\
\hline
\square &
\end{array}
$$

Főtagokat elosztjuk: $(2x^2)/x^2 = 2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
 & (2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x + 2} \\
- & (2x^3 + 0 + 2x) \\
\hline
 & 2x^2 + x + 2 \\
\hline
 & \boxed{}
\end{array}
$$

Főtagokat elosztjuk: $(2x^2)/x^2 = 2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 & \\
\hline
 & & & & & \square & & &
\end{array}
$$

Visszaszorzunk: $2(x^2+1) = 2x^2+2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + x & + 2 & \\
 & & & (2x^2 & + 0 & + 2) & \\
\hline
 & & & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Visszaszorzunk: $2(x^2+1) = 2x^2+2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & +\ 2x^2 & +\ 3x & +\ 2) & :\ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 & +\ 0 & +\ 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & +\ x & +\ 2 & \\
 & (2x^2 & +\ 0 & +\ 2) & \\
\hline
 & & \square & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + x & + 2 & \\
 & - & (2x^2 & + 0 & + 2) & \\
\hline
 & & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
& 2x^2 & + x & + 2 & \\
& -\,(2x^2 + & 0 & + 2) & \\
\hline
& & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-(2x^3 + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
& 2x^2 & + x & + 2 & \\
& -(2x^2 & + 0 & + 2) & \\
\hline
& & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) \; : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + & 2) \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x$.

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) & : \ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 & \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + & 2) & \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + 1)(2x + 2) + x.$

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 & + \ 2x^2 & + \ 3x & + \ 2) & : \ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + \ 0 & + \ 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + \ x & + \ 2 & \\
 & - & (2x^2 & + \ 0 & + \ 2) & \\
\hline
 & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
-(2x^2 + 0 + 2) & \\
\hline
\boxed{x} &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + 2) & : \ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + 2 & \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + 2) & \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 & + \; 2x^2 & + \; 3x & + \; 2) & : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + \; 0 & + \; 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + \; x & + \; 2 & \\
 & - & (2x^2 & + \; 0 & + \; 2) & \\
\hline
 & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
A q és r egyértelműen meghatározott.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m,

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$,

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g$

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. □

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. $\square$

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.

Maradékos osztás: létezés

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

Indukció $\mathrm{gr}(f)$ szerint. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\left(q_0 + (a/b)x^{n-m}\right) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. $\square$

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal,

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal, amelyek főegyütthatója 1 vagy -1.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel (K3.2.1)

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal, amelyek főegyütthatója 1 vagy -1.
Oka: $\mathbb{Z}$-ben 1-gyel és -1-gyel minden számot eloszthatunk.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.

De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.

De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk,
hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. □

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk,
hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. □

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.
Így a maradékos osztás egyértelműségéből is látszik, hogy
$x : 2$ nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa (K3.2.18)

Az $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.
Így a maradékos osztás egyértelműségéből is látszik, hogy $x : 2$ nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben, hiszen $x/2 \notin \mathbb{Z}[x]$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2)$

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Tehát a bal oldal foka nagyobb a jobb oldal fokánál: ellentmondás.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Tehát a bal oldal foka nagyobb a jobb oldal fokánál: ellentmondás.
Ezért $q_1 - q_2 = 0$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Tehát a bal oldal foka nagyobb a jobb oldal fokánál: ellentmondás.
Ezért $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Tehát a bal oldal foka nagyobb a jobb oldal fokánál: ellentmondás.
Ezért $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.
De akkor $r_2 - r_1 = g \cdot 0 = 0$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel (K3.2.1)

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}(g(q_1 - q_2)) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Tehát a bal oldal foka nagyobb a jobb oldal fokánál: ellentmondás.
Ezért $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.
De akkor $r_2 - r_1 = g \cdot 0 = 0$, és így $r_1 = r_2$. $\square$

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy
a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben,
ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$, és $x+1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy
a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben,
ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$, és $x+1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **osztója** $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne, ahol $h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek,

Oszthatóság

Definíció (K3.1.3)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, és $x+1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne, ahol $h(x) = c_0 + c_1x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek, akkor x együtthatóját véve $2c_1 = 1$ teljesülne.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$,

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. □

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. □

Ugyanígy $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-ra is.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben,

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans.

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans. $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal lehet osztani,

Egységek

Definíció (K3.1.9)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Állítás (K3.1.11)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans.
$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal lehet osztani,
$\mathbb{Z}$-ben csak ± 1-gyel osztható minden szám.

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben,

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$,

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse,

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (K3.1. és K3.2. szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott.

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (K3.1. és K3.2. szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek,

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (K3.1. és K3.2. szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (K3.1. és K3.2. szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Az f és g kitüntetett közös osztója $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött az euklideszi algoritmussal számítható ki,

Kitüntetett közös osztó

Definíció (K3.1.19)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (K3.1. és K3.2. szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Az f és g kitüntetett közös osztója $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött az euklideszi algoritmussal számítható ki, és fölírható $f(x)u(x) + g(x)v(x)$ alakban alkalmas $u(x)$, $v(x)$-re.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás (K3.3.9)

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás (K3.3.9)

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ötlet: párosítsunk minden gyököt a komplex konjugáltjával.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\ \overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\ \overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f\left(\overline{c}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f\left(\overline{c}\right)$ áll,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f\left(\overline{c}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f\left(\overline{c}\right)$ áll, a jobb oldalon 0,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f(\overline{c}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f(\overline{c})$ áll, a jobb oldalon 0,
tehát $\overline{c}$ gyöke f-nek. □

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós,
akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) =$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} =$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyananannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós,
akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

A c és a $\overline{c}$ ugyananannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).
Így $f(x)$-nek c és $\overline{c}$ is $k + 1$-szeres gyöke. $\square$

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához:

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak),

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis?

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x$

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x)$

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x) = (1/2)(2x)$.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x) = (1/2)(2x)$.
Ugyanígy $2 = 1 \cdot 2$,

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x) = (1/2)(2x)$.
Ugyanígy $2 = 1 \cdot 2$, de a 2 mégis felbonthatatlan szám.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x) = (1/2)(2x)$.
Ugyanígy $2 = 1 \cdot 2$, de a 2 mégis felbonthatatlan szám.

(2) $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ valós fölött nem bontható föl.

Polinomok szorzatra bontása

Cél

Polinomok szorzatra bontása, ameddig csak lehetséges.
Hasonlít a számok szorzatra bontásához: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Itt 2 és 3 felbonthatatlan, azaz irreducibilis számok.

Definíció-kísérlet

Egy polinomot nevezzünk irreducibilisnek (felbonthatatlannak), ha nem lehet szorzatra bontani.

Problémák

(1) Az x irreducibilis? $x = 1 \cdot x = (-1)(-x) = (1/2)(2x)$.
Ugyanígy $2 = 1 \cdot 2$, de a 2 mégis felbonthatatlan szám.

(2) $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ valós fölött nem bontható föl.
Akkor most $x^2 + 1$ irreducibilis-e, vagy sem?

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$,

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n$

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1$

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n)$

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.

Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.

Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.

Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.

Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.

A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás,

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.
Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak. Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.
Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.
Ez egyértelmű, ha eltekintünk.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.
Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől eltekintünk.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak. Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.
Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.
A bizonyítás fő eszköze:

Felbonthatatlan számok

Emlékeztető számelméletből

Az egész számok között az egységek: 1 és -1.
Az n szám triviális felbontása $n = ab$, ha a vagy b egység.
Vagyis $n = 1 \cdot n = n \cdot 1 = (-1)(-n) = (-n)(-1)$.
Az n szám felbonthatatlan, ha nincs nemtriviális felbontása.
A felbonthatatlanok közül kizárjuk az egységeket.

Példa: A $6 = 2 \cdot 3$ nemtriviális felbontás, mert 2 és 3 nem egység. Ezért a 6 nem felbonthatatlan.
Példa: A 2 számnak csak triviális felbontásai vannak.
Mivel 2 nem egység, ezért a 2 felbonthatatlan.

A számelmélet alaptétele: minden nullától és egységtől különböző szám felírható felbonthatatlanok szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.
A bizonyítás fő eszköze: a kitüntetett közös osztó.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$),

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása **triviális** ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom **irreducibilis** $R[x]$-ben (R fölött),

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása,

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

A számelmélet alaptétele polinomokra (K3.2.12, K3.4.10)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

A számelmélet alaptétele polinomokra (K3.2.12, K3.4.10)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.
Minden nullától és egységtől különböző $R[x]$-beli polinom felírható $R[x]$-beli irreducibilisek szorzataként.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

A számelmélet alaptétele polinomokra (K3.2.12, K3.4.10)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.
Minden nullától és egységtől különböző $R[x]$-beli polinom felírható $R[x]$-beli irreducibilisek szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

A számelmélet alaptétele polinomokra (K3.2.12, K3.4.10)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.
Minden nullától és egységtől különböző $R[x]$-beli polinom felírható $R[x]$-beli irreducibilisek szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.

Bizonyítás: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ra mint számelméletből,

Irreducibilis polinomok

Definíció (K3.1.12, K3.1.13)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy az $f \in R[x]$ polinom $f = gh$ felbontása triviális ($g, h \in R[x]$), ha g és h valamelyike egység $R[x]$-ben.
Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis $R[x]$-ben (R fölött), ha nincs nemtriviális felbontása, és nem egység.
Reducibilis azt jelenti: nem egység és nem irreducibilis.

A számelmélet alaptétele polinomokra (K3.2.12, K3.4.10)

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike.
Minden nullától és egységtől különböző $R[x]$-beli polinom felírható $R[x]$-beli irreducibilisek szorzataként.
Ez egyértelmű, ha a sorrendtől és egységszerestől eltekintünk.

Bizonyítás: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ra mint számelméletből, $\mathbb{Z}[x]$-re legközelebb.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött,

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

$$(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

$$(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező:

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

$$(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező:

$$2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

$$(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező:

$$2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.
A $\mathbb{Z}[x]$-ben 6 nem egység,

Példák felbontásra

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$$

$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

$$(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

$$(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$$

$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező:

$$2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$$

Tanulság

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.
A $\mathbb{Z}[x]$-ben 6 nem egység, sőt 2, 3 itt irreducibilis polinomok.

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság:

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság:
$(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú:

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$,

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$ vagy $f \mid h$. (lásd K3.1.25.)

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság:
$(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú:
ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$ vagy $f \mid h$. (lásd K3.1.25.)

(4) Ebből következik az alaptétel egyértelműségi állítása (ugyanúgy, mint egész számokra).

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$ vagy $f \mid h$. (lásd K3.1.25.)

(4) Ebből következik az alaptétel egyértelműségi állítása (ugyanúgy, mint egész számokra).

(5) A felbontás létezése fokszám szerinti indukcióval.

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$ vagy $f \mid h$. (lásd K3.1.25.)

(4) Ebből következik az alaptétel egyértelműségi állítása (ugyanúgy, mint egész számokra).

(5) A felbontás létezése fokszám szerinti indukcióval.

A $\mathbb{Z}[x]$-beli alaptételt a $\mathbb{Q}[x]$-beli alaptételre vezetjük vissza

Az alaptétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyítása

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött ugyanúgy, mint egész számokra (K3.2.13, K3.2.14):

(1) Az euklideszi algoritmus miatt bármely két polinomnak van kitüntetett közös osztója.

(2) Erre teljesül a kiemelési tulajdonság: $(fg, fh) = f(g, h)$ (lásd K3.1.23.)

(3) Emiatt minden irreducibilis f polinom prímtulajdonságú: ha $f \mid gh$, akkor $f \mid g$ vagy $f \mid h$. (lásd K3.1.25.)

(4) Ebből következik az alaptétel egyértelműségi állítása (ugyanúgy, mint egész számokra).

(5) A felbontás létezése fokszám szerinti indukcióval.

A $\mathbb{Z}[x]$-beli alaptételt a $\mathbb{Q}[x]$-beli alaptételre vezetjük vissza (legközelebb, K3.4. szakasz).

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis!

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2 + 1)^2$.

(5) Gyök létezése elsőfokú irreducibilis tényezőnek felel meg.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. Szakasz)

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$.

(5) Gyök létezése elsőfokú irreducibilis tényezőnek felel meg.

Ezek közül csak (4) igaz $\mathbb{Z}[x]$-ben!

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. □

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, és $f = gh$, akkor $1 = \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.
Ezért g és h egyike nulladfokú, és így egység.
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk, és a főegyütthatót valamelyik tényezőhöz hozzácsapjuk.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad. Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú.

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú.

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad. Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú.

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött, és mindegyik nem valós gyököt párosítjuk a komplex konjugáltjával.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú.

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött, és mindegyik nem valós gyököt párosítjuk a komplex konjugáltjával.
Példa: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ (K2.5.10. Gyakorlat).

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($p = 2$ jó).

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($p = 2$ jó).
A $p = 3$ nem jó:

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($p = 2$ jó).
A $p = 3$ nem jó: $3 \mid 21$.

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($p = 2$ jó).
A $p = 3$ nem jó: $3 \mid 21$. A $p = 5$ nem jó:

Irreducibilitás $\mathbb{Q}[x]$-ben (K3.5. szakasz)

A $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.

Általános módszert nem tanulunk, az alábbi néha működik.

Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2, biz. legközelebb)

Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom.
HA van olyan p prímszám, amelyre

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

AKKOR f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($p = 2$ jó).
A $p = 3$ nem jó: $3 \mid 21$. A $p = 5$ nem jó: $5^2 \mid 150$.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7+(2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt $x^n - 2$ irreducibilis minden $n \geq 1$-re.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt $x^n - 2$ irreducibilis minden $n \geq 1$-re. Azaz létezik $\mathbb{Q}$ fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom.

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt $x^n - 2$ irreducibilis minden $n \geq 1$-re. Azaz létezik $\mathbb{Q}$ fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom.

(5) Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium:

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7 + (2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x + 18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt $x^n - 2$ irreducibilis minden $n \geq 1$-re. Azaz létezik $\mathbb{Q}$ fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom.

(5) Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium:
Ha a p prím osztja a polinom minden együtthatóját a konstans tag kivételével,

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7+(2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x+18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt x^n-2 irreducibilis minden $n \geq 1$-re. Azaz létezik $\mathbb{Q}$ fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom.

(5) Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium:
Ha a p prím osztja a polinom minden együtthatóját a konstans tag kivételével, és p^2 nem osztja a főegyütthatót,

A Schönemann–Eisenstein-kritérium tanulságai

Tanulságok

(1) Nem igaz a megfordítása. Példa: $x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de nem alkalmazható rá a kritérium.

(2) A nevezőkkel felszorozva racionális együtthatós polinomokra is alkalmazható lehet. Példa: $x^7+(2/3)$.

(3) Csak $\mathbb{Q}$ fölötti, és nem $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást biztosít. Példa: $9x+18$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

(4) A kritérium miatt x^n-2 irreducibilis minden $n \geq 1$-re. Azaz létezik $\mathbb{Q}$ fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom.

(5) Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium:
Ha a p prím osztja a polinom minden együtthatóját a konstans tag kivételével, és p^2 nem osztja a főegyütthatót, a polinom akkor is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (K3.5.7).

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja,

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

$x^4 + 1$-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$,

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.
Tehát x^4+1 is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.
Tehát x^4+1 is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Tétel

Létezik algoritmus az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ fölött,

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.
Tehát x^4+1 is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Tétel

Létezik algoritmus az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ fölött, például interpoláció segítségével.

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.
Tehát x^4+1 is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Tétel

Létezik algoritmus az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ fölött, például interpoláció segítségével. Van hatékony algoritmus is.

További módszerek $\mathbb{Q}$ fölött

Állítás (K3.5.5)

$f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha alkalmas eltoltja, vagyis az $f(x+c)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött ($c \in \mathbb{Q}$).

Példa

x^4+1-re nem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein.
$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+2$, erre már igen, $p=2$-vel.
Tehát x^4+1 is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Tétel

Létezik algoritmus az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ fölött, például interpoláció segítségével. Van hatékony algoritmus is.

A módszerek összefoglalása: a Kiss-könyv 111. oldalán.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság,

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység,

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás,

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom. Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése,

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra.
Gyökök és irreducibilitás kapcsolata.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra.
Gyökök és irreducibilitás kapcsolata. A $\mathbb{C}[x]$ és $\mathbb{R}[x]$ irreducibilisei.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra.
Gyökök és irreducibilitás kapcsolata. A $\mathbb{C}[x]$ és $\mathbb{R}[x]$ irreducibilisei.
A Schönemann–Eisenstein-kritérium.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Oszthatóság, egység, triviális felbontás, irreducibilis polinom.
Kitüntetett közös osztó.

Tételek

Maradékos osztás polinomokra: létezés és egyértelműség.
A hányados és a maradék együtthatói összeadás, kivonás, szorzás, és az osztó főegyütthatójával való osztás segítségével kaphatók.
Az egységek leírása $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ fölött.
A kitüntetett közös osztó létezése, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ alaptételes.
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra.
Gyökök és irreducibilitás kapcsolata. A $\mathbb{C}[x]$ és $\mathbb{R}[x]$ irreducibilisei.
A Schönemann–Eisenstein-kritérium. Az eltolt irreducibilitása.