Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

7. előadás

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.

Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.

Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

$f(\text{alma}) = \text{barack},$

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma},$

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma}, \quad f(\text{barack}) = \text{szilva}.$

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

$f(\text{alma}) = \text{barack}$, $f(\text{szilva}) = \text{alma}$, $f(\text{barack}) = \text{szilva}$.

Az $f(x)$ az x helyére tett tárgy.

A permutáció mint átrendezés

Tétel

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni.
Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. Átrendezhetjük így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges.
Az átrendezés egy f függvény:

$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma}, \quad f(\text{barack}) = \text{szilva}.$

Az $f(x)$ az x helyére tett tárgy. Az f kölcsönösen egyértelmű.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$,

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$,

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$,

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$.
Mindkét sorban felsoroljuk az X halmaz összes elemét.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)

Legyen X (rendszerint véges) halmaz.
Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezük.
Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$.
Mindkét sorban felsoroljuk az X halmaz összes elemét.
Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képzi.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció,

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba,

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi,

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja,

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig **fixen hagyja**, azaz saját magába képzi.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig **fixen hagyja**, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1, 2) \circ (2, 3)$:

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig **fixen hagyja**, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy **transzpozíciónak** hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2, \;\; 2 \mapsto 3 \mapsto 3,$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y cseréje az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig **fixen hagyja**, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy **transzpozíciónak** hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2, \;\; 2 \mapsto 3 \mapsto 3, \;\; 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2,3) \circ (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)

Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$.
Az x és y **cseréje** az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig **fixen hagyja**, azaz saját magába képzi.
Az ilyen permutációkat cserének vagy **transzpozíciónak** hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq (2,3) \circ (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló,

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló.

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló.
Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló.

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló.
Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló.
Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló.
Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló.
Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

A szükséges cserék száma a legrosszabb esetben is

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)

Ezentúl permutációk kompozícióját szorzásnak nevezzük,
és egymás mellé írással jelöljük.

Tétel (K4.2.5)

Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás

Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van,
ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló.
Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló.
Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

A szükséges cserék száma a legrosszabb esetben is
eggyel kevesebb, mint a tárgyak száma.

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ előállítása cserék szorzataként:

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ előállítása cserék szorzataként:}$$

$$(1, 2)$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ előállítása cserék szorzataként:

$(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ előállítása cserék szorzataként:

$(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ előállítása cserék szorzataként:

$(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5)$

Példák cserék szorzatára

Példa

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz.

Példák cserék szorzatára

Példa

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz.

Azaz f többféleképpen is felírható cserék szorzataként.

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ előállítása cserék szorzataként:

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz.
Azaz f többféleképpen is felírható cserék szorzataként.

Tétel

Nem fordulhat elő, hogy egy permutáció páratlan sok, és páros sok csere szorzataként is felírható.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll:

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: 21,

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban:

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23, 45,$

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \le i < j \le n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23, 45, 13$.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23, 45, 13$.
Az inverziók száma tehát 5.

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)

Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$.
Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak.
Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23, 45, 13$.
Az inverziók száma tehát 5.
Az S_n egy permutációjának maximum $\binom{n}{2}$ inverziója lehet.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció **páros**, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f **előjele** $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció **páratlan**, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f **előjele** -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J,

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Állítás (K4.2.12)

Minden transzpozíció előjele -1.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Állítás (K4.2.12)

Minden transzpozíció előjele -1. Biz: később.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Állítás (K4.2.12)

Minden transzpozíció előjele -1. Biz: később.
Ezért a páros permutációk páros sok csere,

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)

Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Állítás (K4.2.12)

Minden transzpozíció előjele -1. Biz: később.
Ezért a páros permutációk páros sok csere, a páratlan permutációk páratlan sok csere szorzataként kaphatók.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden).

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció,

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett:

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x$

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g\big(f(x)\big) = x = f\big(g(x)\big)$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van,

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g\big(f(x)\big) = x = f\big(g(x)\big)$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:
$\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1})$

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:
$\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1}) = \mathrm{sg}(id)$

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)

Az identikus permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$.
Az f permutáció inverze az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:
$\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1}) = \mathrm{sg}(id) = 1$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van,

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Csere előjele

Állítás

Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i, j) csere előjele is -1.

Csere előjele

Állítás

Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i, j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be,

Csere előjele

Állítás

Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i, j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi,

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges.

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1$ hiszen $g(1) = i$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i, j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1, 2) \circ g^{-1} = (i, j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2$ hiszen $g(1) = i$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k)$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i, j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k)$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}((i,j)) =$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.

Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.

A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}\big((1,2)\big)\mathrm{sg}(g^{-1})$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.

Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.

A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}\big((1,2)\big)\mathrm{sg}(g^{-1}) = (-1)\mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}(g^{-1})$

Csere előjele

Állítás

Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)

Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás

Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}\big((1,2)\big)\mathrm{sg}(g^{-1}) = (-1)\mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}(g^{-1}) = -1.$ $\square$

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan,

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1, 2)$-t rendel.
Mivel $(1, 2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant,

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1, 2)$-t rendel.
Mivel $(1, 2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1, 2)$-t rendel.
Mivel $(1, 2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű,

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2)$

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2) = f \circ ((1,2) \circ (1,2))$

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2) = f \circ ((1,2) \circ (1,2)) = f \circ id$

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2) = f \circ ((1,2) \circ (1,2)) = f \circ id = f$,

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2) = f \circ ((1,2) \circ (1,2)) = f \circ id = f$,
azaz ha kétszer csináljuk, visszakapjuk az eredeti f-et. □

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)

Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás

Elég: ugyanannyi páros és páratlan permutáció van.
Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.
Ez az f-hez $f \circ (1,2)$-t rendel.
Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt
páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel.
Kölcsönösen egyértelmű, mert önmagának az inverze:
$(f \circ (1,2)) \circ (1,2) = f \circ ((1,2) \circ (1,2)) = f \circ id = f$,
azaz ha kétszer csináljuk, visszakapjuk az eredeti f-et. $\square$

Ugyanez $(1,2)$ helyett minden (i,j)-re megy.

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$,

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője. A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak,

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője. A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele -1

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak a determináns minden sorában van tényezője.
A második indexek egy PERMUTÁCIÓT adnak, pl. $2, 3, 1$.
Ezért a determináns minden oszlopában is van egy tényező.
A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió).
A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Ezek előjele -1 (rendre 3, 1, 1 darab inverzió).

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} +$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} +$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} +$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)} +$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)} + \mathrm{sg}(f_6)a_{1f_6(1)}a_{2f_6(2)}a_{3f_6(3)} =$$

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} +$$
$$+ \mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)} + \mathrm{sg}(f_6)a_{1f_6(1)}a_{2f_6(2)}a_{3f_6(3)} =$$
$$= \sum_{f \in S_3} \mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)}\,.$$

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Példa

Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll.

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Példa

Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

permutáció előjele -1

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Példa

Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

permutáció előjele -1 (láttuk, hogy 5 inverzió van).

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Példa

Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

permutáció előjele -1 (láttuk, hogy 5 inverzió van).
Az ehhez tartozó tag $-a_{12} a_{24} a_{35} a_{41} a_{53}$.

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az M determinánsa legyen

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Példa

Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

permutáció előjele -1 (láttuk, hogy 5 inverzió van). Az ehhez tartozó tag $-a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$.
FONTOS: e szorzat előjelét a permutáció előjele, és NEM a kifejtésnél definiált sakktáblaszabály adja!

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re,

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs.
Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs.
Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik.
Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. $\square$

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs.
Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik.
Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. $\square$

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk λ-val,

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f\in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs.
Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik.
Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. $\square$

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk λ-val, mert az összeg mindegyik tagjában minden sorból és oszlopból pontosan egy tényező van.

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül.

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)} =$

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f\in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} +$

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \ldots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \ldots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \ldots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \ldots a_{nf(n)}$.

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.
Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik,

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.
Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. $\square$

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.
Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. $\square$

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)

Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.
Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. $\square$

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.

HF: 3×3-asra részletezni ezt a bizonyítást.

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix,

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.
Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. $\square$

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.
Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. □

Elemzés

A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex,

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.
Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. □

Elemzés

A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex, azaz a_{ij}, ahol $i > j$.

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.
Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. $\square$

Elemzés

A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex, azaz a_{ij}, ahol $i > j$.

A megmaradó tag az identikus permutációhoz tartozik.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen:

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id)a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)}\dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id)a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Mivel $\mathrm{sg}(id) = 1$,

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: ha mindenki a saját helyén ül.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet.
Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt.
Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)

Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id)a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Mivel $\mathrm{sg}(id) = 1$,
ez tényleg a főátlóbeli elemek szorzata. $\square$

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$,

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$,

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.
A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.
A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert
$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$,

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.
A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert

$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$,

$a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$,

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.
A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert

$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$,

$a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$,

$a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re.
A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert

$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$,

$a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$,

$a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.

Az előjelezés arra való, hogy általában is minden így kiessen.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)},$$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$, mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$ (megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).
Az első indexek sorban vannak,

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Ekkor $g(i) = f(j)$,

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).
Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).
Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.

Ezért $g = f \circ (i, j)$.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.

Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\operatorname{sg}(g) =$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.

Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i, j)) =$

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).
Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.
Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i, j)) = -sg(f)$.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.
$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.
$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).
Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.
Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i, j)) = -sg(f)$.
Tehát a sárga és kék tagok kiejtik egymást.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.

Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.

Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i,j)) = -sg(f)$.

Tehát a sárga és kék tagok kiejtik egymást.

Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat,

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.

$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.
Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i, j)) = -sg(f)$.
Tehát a sárga és kék tagok kiejtik egymást.
Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat,
mert $(f \circ (i, j)) \circ (i, j) = f$.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik sor egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.

$a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét).

Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$.
Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}((i, j)) = -sg(f)$.
Tehát a sárga és kék tagok kiejtik egymást.
Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat,
mert $(f \circ (i, j)) \circ (i, j) = f$. Tehát minden tag kiesik. □

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -$$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} \,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni:

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -$$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} \,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -$$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ -b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} =$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$.

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - $$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. □

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.

$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.

$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. □

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás inverzei.

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás inverzei.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás inverzei.

Az összes többi tagnál is inverz permutációkat kapunk.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}.$$

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni:

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} =$

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \ldots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \ldots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \ldots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \ldots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban,

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \ldots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \ldots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \ldots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \ldots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban,

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}.$$

$$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}.$

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}.$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}.$

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}.$

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \cdots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \cdots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \cdots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal.

Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$,

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal.

Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$.

Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$.

A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért

$i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal.

Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz.

Az $f \leftrightarrow f^{-1}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés S_n-en. $\square$

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő,

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1,

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

Állítás

Az (1) és (2) tulajdonságok, valamint az, hogy az egységmátrix determinánsa 1, a determináns értékét egyértelműen meghatározzák.

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

Állítás

Az (1) és (2) tulajdonságok, valamint az, hogy az egységmátrix determinánsa 1, a determináns értékét egyértelműen meghatározzák. Biz: Gauss-elimináció.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható,

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

Múltkor láttuk:

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) oszlopvektorokkal való egyszerű számolás.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

Múltkor láttuk:

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) oszlopvektorokkal való egyszerű számolás.
A (8) az inverz aldeterminánsos képletéből következik.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

Múltkor láttuk:

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) oszlopvektorokkal való egyszerű számolás.
A (8) az inverz aldeterminánsos képletéből következik.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.
Transzpozíció előjele.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.
Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.
Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma.
A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.
Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma.
A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.

(Több most bizonyított tétel kimondása a múltkor szerepelt.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Permutáció, kompozíció, transzpozíció.
Inverzió, permutáció előjele.
A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)

Minden permutáció transzpozíciók szorzata.
A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele.
Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma.
A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.

(Több most bizonyított tétel kimondása a múltkor szerepelt. Ezeket a bizonyításokat csak a vizsgán kérjük majd számon.)