Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

6. előadás

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük,

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$$

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}.$$

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}.$$

Ezt $ad - bc$-vel osztva az egységmátrixok kapjuk.

2×2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}.$$

Ezt $ad - bc$-vel osztva az egységmátrixok kapjuk.

HF: Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is. $\square$

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor az M determinánsa.

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$,

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$,

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix},\ MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$.

$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd')$

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, \; MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix},\ MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.

$\det(M)\det(N) = (ad - bc)$

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix},\ MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.

$\det(M)\det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c')$.

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$.

$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.

$\det(M)\det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c')$.

HF: Mindkettő $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$. $\square$

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$,

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad-bc\neq 0$, akkor $M=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M)=ad-bc=0$, akkor M-nek nincs inverze.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze:

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.

Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad-bc\neq 0$, akkor $M=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M)=ad-bc=0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN)=\det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN=E_2$.

Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N)=\det(E_2)$.

$E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0$

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.

Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

Előző lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.

Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$.

Ezért $\det(M)$ sem lehet nulla. $\square$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} =$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} +$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} =$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris
(összegtartó,

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó).

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra,

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ értéke

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ értéke

$(a+a')d-(b+b')c$,

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} +$ értéke

$(a+a')d - (b+b')c$,

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} +$ értéke

$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke

$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+$

A determináns lineáris

Állítás

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke

$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+(a'd-b'c)$.

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke

$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+(a'd-b'c)$.

Ezek egyenlők.

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$ minden λ skalárra.

Azaz a determináns az első oszlopában lineáris (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$\det \begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke $(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+(a'd-b'c)$. Ezek egyenlők. A skalárszoros-tartás bizonyítása hasonló. $\square$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő,

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba$$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

$\square$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0. \qquad \square$$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix,

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0. \qquad \square$$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0. \qquad \square$$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0. \qquad \square$$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b$$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0. \qquad \square$$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad,$$

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$ □

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánsa

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$ $\square$

Definíció

Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk,

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$,

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w]$

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$,

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De
$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$,

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De
$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$,
mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De
$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$,
mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.
Végül $\det[w, w] = 0$,

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De
$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$,
mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.
Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De
$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$,
mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.
Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.
Ezért $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$. □

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} =$$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da =$$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Második bizonyítás

$\det[w, v] =$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Második bizonyítás

$\det[w, v] =$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] =$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Második bizonyítás

$\det[w, v] = \det[w + v, v] =$

A második oszlopból kivonjuk az elsőt.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc). \qquad \square$$

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$$

A második oszlopból kivonjuk az elsőt.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

□

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$$
$$= \det[w + v, -w] =$$

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$ $\square$

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$$
$$= \det[w + v, -w] =$$

Az első oszlophoz hozáadjuk a másodikat.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc). \qquad \square$$

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w+v, v] = \det[w+v, v-(w+v)] =$$
$$= \det[w+v, -w] = \det[v, -w] =$$

Az első oszlophoz hozáadjuk a másodikat.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$ $\square$

Második bizonyítás

$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$
$= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] =$

Kiemelünk -1-et a második oszlopból.

Oszlopcsere

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc). \qquad \square$$

Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w+v, v] = \det[w+v, v-(w+v)] =$$
$$= \det[w+v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w]. \qquad \square$$

Kiemelünk -1-et a második oszlopból.

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

□

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$ □

Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris,

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc. \qquad \square$$

Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, számolás nélkül következik,

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

□

Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, számolás nélkül következik, hogy a soraiban is az,

A transzponált determinánsa

Állítás

A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc. \qquad \square$$

Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, számolás nélkül következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix,

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T)$

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T)$

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. □

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. $\square$

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris,

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. □

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk,

Sorcsere

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix.
Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból.
Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,
azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$.
Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,
azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. $\square$

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

(8) Egy mátrix akkor invertálható,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$,

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.
A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk,

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.
A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk,

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.
A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.
A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$,

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.
A (8)-ról ma lesz szó aldeterminánsok felhasználásával.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla,

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok piros színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora,

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$. Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz,

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő,

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla,

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni).

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha van olyan sora, melyből a többi sor alkalmas skalárszorosát rendre kivonva csupa nulla sort kapunk. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és pl. $v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Tehát ebből a sorból ki tudtuk vonni a többi sor alkalmas skalárszorosát úgy, hogy csupa nulla sort kapjunk. □

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát
- megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát
- megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a sakktáblaszabály:

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát
- megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a sakktáblaszabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó
előjeles aldeterminánssal,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó
előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik
oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk,
és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Sorokra:

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó
előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik
oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk,
és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Sorokra:
$a_{j1}M_{k1} + a_{j2}M_{k2} + \ldots + a_{jn}M_{kn} = 0$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó
előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk,
és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Sorokra:
$a_{j1}M_{k1} + a_{j2}M_{k2} + \ldots + a_{jn}M_{kn} = 0$ minden $j \neq k$-ra.

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint,

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint, így 0.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk.
Mivel N-nek van két egyforma oszlopa,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. □

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. □

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$-ra 108.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha $\det(M) \neq 0$,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor

$\det(M)\det(M^{-1}) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor

$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor

$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.
Megfordítva: A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.
Megfordítva: A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel,

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.

Megfordítva: A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF). $\square$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze:

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

$$K(MN) = (KM)N$$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

$$KE_n = K(MN) = (KM)N$$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. □

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. □

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével.

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. $\square$

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével. Így a kétoldali inverz egyértelmű.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n\times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.

Ha $\det(M) \neq 0$,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.
Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.

Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás $x_j = \dfrac{\det(M_j)}{\det(M)}$.

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$,

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.

Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.

Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) =$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) =$

$M_1 = [b, v_2]$ és $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$

$M_1 = [b, v_2]$ és $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$

Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$$
$$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] =$$

Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] =$

$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$$
$$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] =$$

$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n}$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.

Előjeles aldetermináns.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik;

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix,

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;
felső háromszögmátrix, transzponált,

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;
felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.
Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal;

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.
Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.
Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.
Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.
Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.
Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.
A determináns eltűnésének jellemzése.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2-es és 3×3-as determináns.
Előjeles aldetermináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;
felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa.
A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Vandermonde determináns.
Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.
Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.
A determináns eltűnésének jellemzése. A Cramer-szabály.