Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

4. előadás

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész).

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}$$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$:

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right)$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right) = \ 1 + i$.

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) =\quad 1+i$.

$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big)$

$k=2$:

$k=3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = 1 + i.$

$k = 1$: $\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right) = -1 + i.$

$k = 2$: $\sqrt{2}\left(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\right)$

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1+i$.

$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1+i$.

$k=2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1-i$.

$k=3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.

$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1+i$.
$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1+i$.
$k=2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1-i$.
$k=3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1-i$.

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.
$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$. Tovább?

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$:

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big)$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\Big(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\Big) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$\dfrac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} =$

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} =$

A negyedik gyökök száma

$$z=-4=4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)=4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4)+i\sin(\ \pi/4)\big)=1+i$.
$k=4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4)+i\sin(9\pi/4)\big)=1+i$. Mint $k=0$-ra.
Oka: $9\pi/4-\pi/4=2\pi$.

$$\frac{\pi+2(k+4)\pi}{4}=\frac{\pi+2k\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{\pi+2k\pi}{4}+2\pi.$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\left(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\right) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\left(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\right) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$,

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi+2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m-k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ \ -1+i,\ \ -1-i,\ \ 1-i$.

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész),

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi + 2m\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m=k+n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít. $\square$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít. □

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít. $\square$

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít. $\square$

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás)

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás:

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül,

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való **eltolás**.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) **forgatva nyújtás**: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i \sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

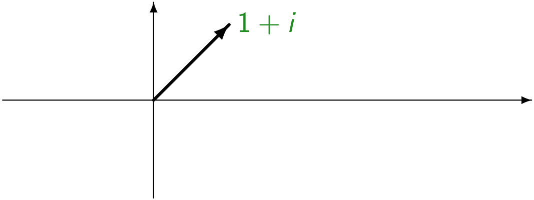
Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja. □

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

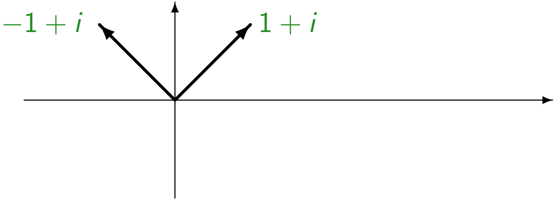
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$,



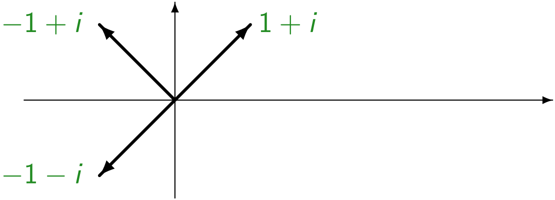
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$,



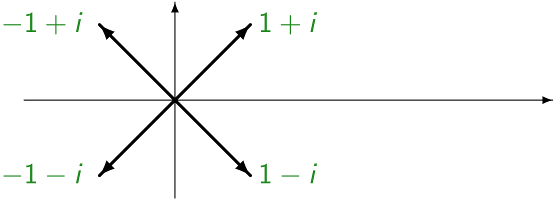
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$,



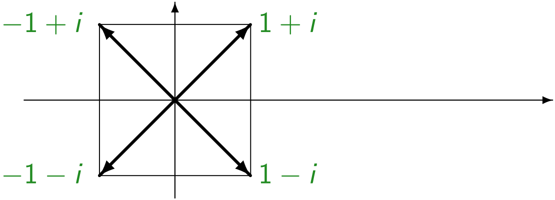
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.



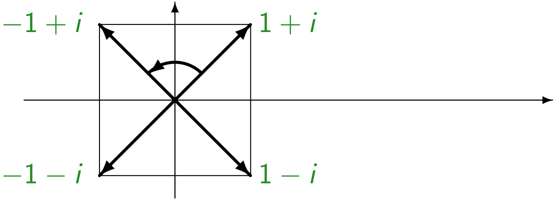
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.

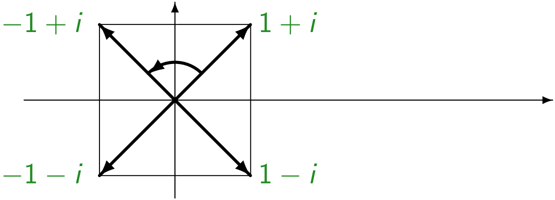


Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90^\circ$-os elforgatottja $-1+i$, mert

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



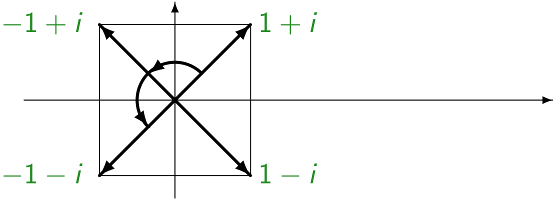
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i\sin 90°)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



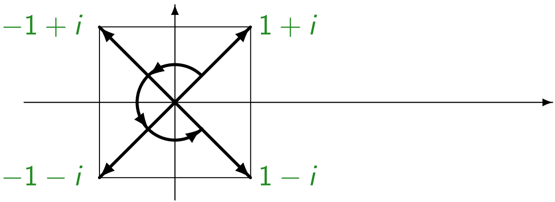
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$,

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



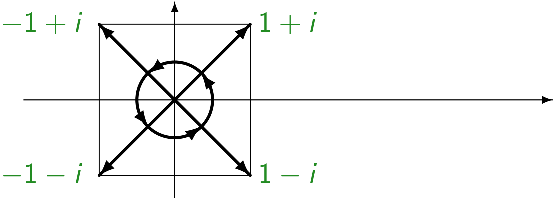
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90^\circ$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$, $i(-1-i)=1-i$,

$i=1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$, $i(-1-i)=1-i$, $i(1-i)=1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(k+1)\pi}{n}.$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög. $\square$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik **egységgyököknek** nevezzük.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i \quad = \quad i.$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$

$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4)$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$

$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$

$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &= -i.
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) & &&
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i. \\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1. \\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i. \\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i &&= 1.
\end{aligned}$$

A hatodik egységgyökök

Példa

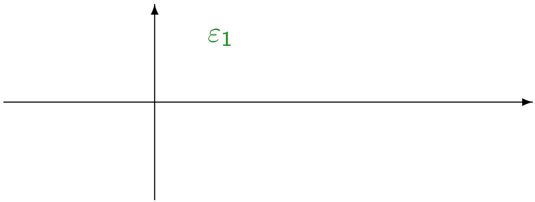
A hatodik egységgyökök a következők.

A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6)$

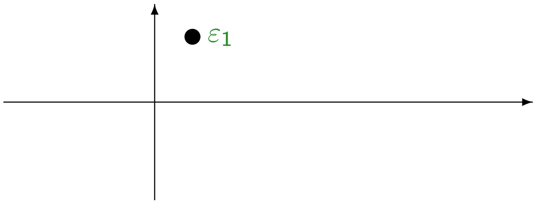


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$



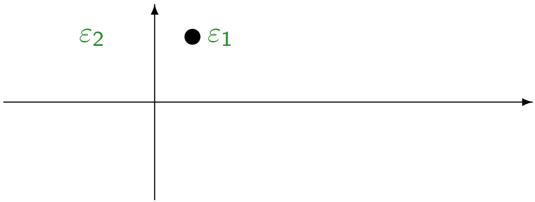
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6)$



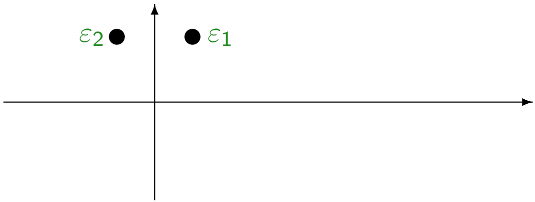
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

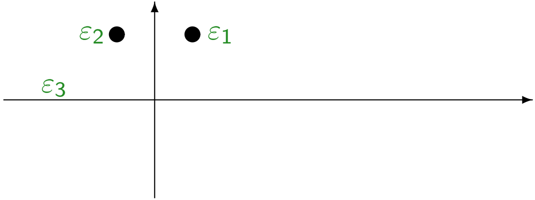
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

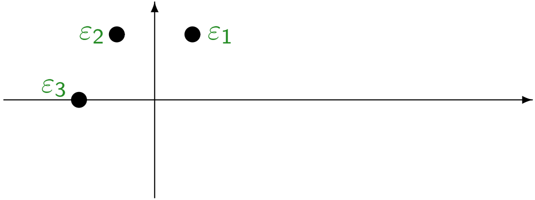
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$



A hatodik egységgyökök

Példa

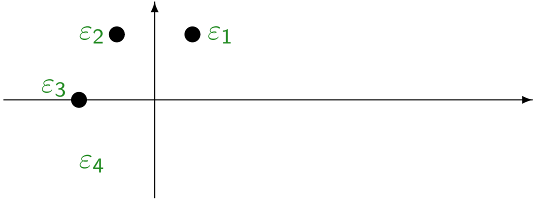
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i \sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i \sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i \sin(\ 8\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

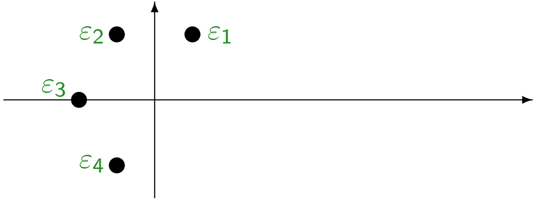
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

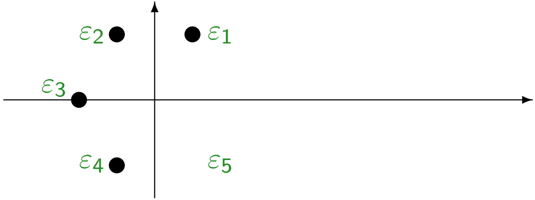
$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6)$

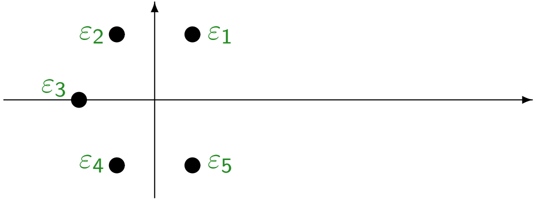


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$$
$$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

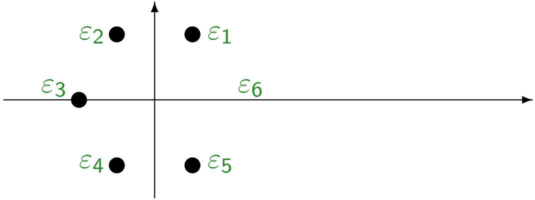
$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = \ \ 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

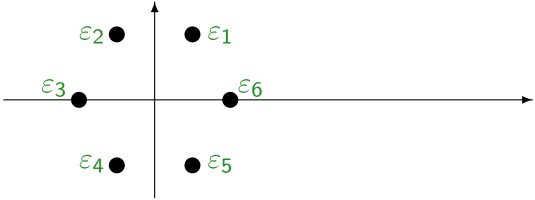
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$

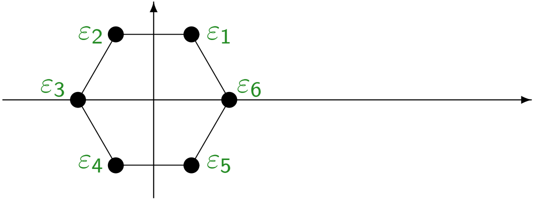


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$$
$$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1,$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon$, akkor $w = \varepsilon w_0$.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van:

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van:

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik:

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ rendje az egész kitevős hatványainak a száma.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ rendje az egész kitevős hatványainak a száma.
Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.
Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ rendje az egész kitevős hatványainak a száma.
Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2$,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ rendje az egész kitevős hatványainak a száma.
Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$,

A rend fogalma

A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5=i$, $i^6=i^2=-1$, stb.
Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.
Képletben: ha $n=4q+r$, akkor $i^n=i^r$ (mert $i^{4q}=(i^4)^q=1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2=-1$, $(-i)^3=i$, $(-i)^4=1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0\neq z\in\mathbb{C}$ rendje az egész kitevős hatványainak a száma.
Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1)=2$, $o(i)=4$, $o(-i)=4$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. $\square$

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. □

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív,

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a néggyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. □

Mivel a $k-\ell$ és $\ell-k$ jó kitevők egyike pozitív, ezért z-nek van pozitív jó kitevője is.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n$

mert n jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r}$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r$

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq}$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$,

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$, azaz n jó kitevő. $\square$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \dots, z^{d-1}$ páronként különböző.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.
Azaz z rendje d,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d.
Ekkor z rendje d, és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.
$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.
Azaz z rendje d, és a hatványok periódikusan ismétlődnek. $\square$

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1				
2				
3				
4				
5				
k				

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy,
hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6		
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3		
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy,
hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2		
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0			
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4			
5				
k				

0123<u>4</u>50

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3		
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0			
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5			
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4			
k				

0123450123<u>4</u>50

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3			
k				

012345012345012345<u>3</u>450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy,
hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2			
k				

012345012345012345012345 0

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1			
k				

012345012345012345012345012345 0

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0			
k				

012345012345012345012345012345<u>0</u>

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6		
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$		

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$		$n/(n,k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$	$k/(n,k)$	$n/(n,k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál:

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \;\Bigg|\; \frac{k}{(n,k)} m$$

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz.
Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot" tesz meg, ami $kn/(n,k)$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n, ezért a megtett körök száma a megtett távolság n-edrésze,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n, ezért a megtett körök száma a megtett távolság n-edrésze, vagyis $k/(n,k)$. $\square$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon,

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n,k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n,k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. □

Illusztráció: $o(i) = 4$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) =$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. □

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \dfrac{4}{(4, 3)}$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. □

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \dfrac{4}{(4, 3)} = 4$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök),

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt
$o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) =$

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van,
azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt
$o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.
Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.
Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n.

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k-ra.
Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$. Mivel $(n, k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$. □

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n,k)=1$, akkor $\varepsilon_k=\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n,k)=1$, akkor $\varepsilon_k=\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z=\cos 336^\circ+i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ+i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336\cdot 1^\circ$, ami $336/360\cdot 2\pi$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
$336/360$ racionális szám, így z egységgyök.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
$336/360$ racionális szám, így z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$. $336/360$ racionális szám, így z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i\sin(14 \cdot 2\pi/15)$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
$336/360$ racionális szám, így z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i\sin(14 \cdot 2\pi/15)$.
Mivel $(14, 15) = 1$, ezért z rendje a fenti állítás miatt 15. $\square$

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, $o(z)$. A rend a hatványok száma.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z jó kitevői azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z jó kitevői azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z jó kitevői azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.
- A z akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse; $o(z)$ ezen egyszerűsíthetetlen tört nevezője.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb,

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell. Így (2) $\iff$ (3).

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n =$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$

Rendje n, tehát n hatványa van.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1$.

Rendje n, tehát n hatványa van.

Így minden n-edik egységgyököt megkapunk. $\square$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ **Euler-függvény** a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n-edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n-edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. Láttuk: $\varepsilon_k = \varepsilon_\ell \iff n \mid k - \ell$. $\square$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i\sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-könyv 1.5. Szakaszát.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak
van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak
van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével,

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével, de következik az algebra alaptételéből is (később).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7),

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Komplex szám hatványainak egyenlősége,
a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Komplex szám hatványainak egyenlősége,
a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8).
A hatvány rendjének képlete (K1.5.10).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Komplex szám hatványainak egyenlősége,
a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8).
A hatvány rendjének képlete (K1.5.10).
A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Komplex szám hatványainak egyenlősége,
a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8).
A hatvány rendjének képlete (K1.5.10).
A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11).
A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Komplex szám rendje (K1.5.7), jó kitevője (K1.5.6).
Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Komplex szám hatványainak egyenlősége,
a rend és a jó kitevők kapcsolata (K1.5.8).
A hatvány rendjének képlete (K1.5.10).
A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11).
A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).