Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2013. december 10.) — eredmények és pontozás

1. a) A determináns értéke -3 (1 pont), a mátrix inverze pedig $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ (3 pont).

b) 7 inverzió van, az előjel negatív (2 pont).

2. a) Hányados: $x/2-1/2$, maradék $x/2+5/2$ (3 pont). **b)** Mivel $\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)\Phi_{10}(x) = x^{10}-1$ (1 pont), és $\Phi_4(x) = x^2+1$, ezért

$$\Phi_{20}(x) = \frac{x^{20}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}} = \frac{x^{20}-1}{(x^{10}-1)(x^2+1)} = \frac{x^{10}+1}{x^2+1} = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 \text{ (2 pont).}$$

3. A kritériumban p-re csak 210 prímosztói jöhetnek szóba, azaz 2, 3, 5 és 7 (1 pont). A főegyüttható miatt nem jó a 3 (1 pont), és mivel $2^2 5^2$ osztja a konstans tagot, ezért p csak 7 lehet (1 pont). Így $7 \mid a, b$, de $49 \nmid b$ (1 pont). Ahhoz, hogy f reducibilis legyen $\mathbb{Z}$ fölött, az kell, hogy ne legyen primitív. A főegyüttható miatt csak a 3 prímet lehet kiemelni, ezért $3 \mid a, b$ is szükséges (1 pont). Ennek eleget tesz például $a = b = 21$ (1 pont). *Megjegyzés:* a teljes megoldáshoz a fenti gondolatmenetet nem kell leírni, de az a és b megadása mellett (2 pont) meg kell indokolni, hogy miért teljesül a kritérium (2 pont), és hogy miért nem irreducibilis a kapott f a $\mathbb{Z}[x]$-ben (2 pont).

4. Az oszthatóság azt jelenti, hogy $x^{2013} + 3cx + d = (x^2+4)h(x)$ alkalmas h polinomra. Mivel $x^2 + 4 = (x+2i)(x-2i)$, ez azzal ekvivalens, hogy $2i$ és $-2i$ is gyöke $x^{2013} + 3cx + d$-nek, hiszen ez két különböző gyöktényező (2 pont). Tudjuk, hogy $i^{2013} = i$, hiszen $2013 \equiv 1$ (4) (1 pont). Ezért $2^{2013}i + 6ci + d = 0$ és $-2^{2013}i - 6ci + d = 0$ (1 + 1 pont). Innen $d = 0$ és $c = -2^{2012}/3$ (1 pont).

5. A gyökök és együtthatók összefüggéséből $\sigma_1 = 2/5$, $\sigma_2 = -3/5$ és $\sigma_3 = -1/5$ (1 pont), ezért a gyökök négyzetösszege $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 34/25$ (1 pont), a reciprokösszeg pedig $\sigma_2/\sigma_3 = 3$ (1 pont). Mivel $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$ (1 pont), továbbá $(a+b+c)(ab+ac+bc) = 3abc + (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)$ (1 pont), ezért a köbösszeg $\sigma_1^3 - 6\sigma_3 - 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = 23/125$ (1 pont). *Második megoldás:* Az egyenletbe helyettesítve $a^3 = (2/5)a^2 + (3/5)a - (1/5)$, és ugyanez igaz b-re és c-re is (1 pont). Ezeket összeadva a köbösszeg $(2/5)(a^2+b^2+c^2) + (3/5)(a+b+c) - (3/5)$ (1 pont). A négyzetösszeget már ismerjük, a végeredmény $(2/5)(34/25) + (3/5)(2/5) - (3/5) = 23/125$ (1 pont).

6. Az első sor végig 3. Emeljünk ki belőle 3-at, majd vonjuk ki a kapott csupa 1-esekből álló sor kétszeresét a többi sorból. Ekkor az i-edik sor j-edik eleme i^j lesz, és ez érvényes az első sorra is (3 pont). Emeljünk ki az i-edik sorból i-t minden i-re. Eddig $3(n+1)!$-t emeltünk ki (1 pont), és Vandermonde-determináns marad, melynek értéke $\prod_{n+1 \geq j > i \geq 1}(j-i)$ (1 pont). Ez a szám osztható $n!$-sal, hiszen tényezői az $(n+1) - i$ különbségek $i = 1, 2, \ldots n$-re (1 pont). (Az eredeti determináns értéke $3 \cdot (n+1)! \cdot n! \cdot (n-1)! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 2!$).