

## Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2013. október 22.) — eredmények és pontozás

- 1. a)** A megoldóképletből a négyzetgyök alatti szám  $3+4i$  (1 pont), négyzetgyöke  $\pm(2+i)$  (1 pont), a megoldások  $3+2i$  és  $1+i$  (1 pont). **b)** A szám trigonometrikus alakja  $8(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$  (1 pont). A köbgyökök (2 pont, hibánként 1 pont levonás):  $2(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$ , első síknegyed;  $2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$ , harmadik síknegyed;  $2(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ)$ , negyedik síknegyed.
- 2.** A racionális gyöktesztrel számolva a lehetőségek  $\pm 1$  és  $\pm 1/2$  (2 pont). Pozitív gyök nem lehet, Hornerrel a gyöktényezőket mindig kiemelve az eredmény  $2(x + (1/2))(x + 1)^2$  (3 pont). A  $-1$  multiplicitása 2, a  $-1/2$  multiplicitása 1 (1 pont).
- 3.** Az egyenlet homogén lineáris egyenletrendszerre vezet, melynek általános megoldása Gauss-eliminációval  $N = \begin{pmatrix} -(3/2)u + v & u \\ u & v \end{pmatrix}$  (itt  $u$  és  $v$  a szabad változók, 4 pont). Ha  $N$  egész elemű, akkor  $u$ ,  $v$ ,  $-(3/2)u$  is egész, és mivel 2 és 3 relatív prímekek,  $u$  páros (1 pont). Ha  $u/2$  vagy  $v$  páros, akkor már  $yu$  osztható 8-cal, egyébként  $x$  lesz páros, és akkor már  $xyu$  osztható 8-cal (1 pont).
- 4.** Ha  $z = x + iy$ , akkor  $1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$  (1 pont). Mindkét oldalt kiszámolva kapjuk, hogy  $4x/(x^2 + y^2) + 1 \leq 4y/(x^2 + y^2) - 1$  (2 pont). Rendezve  $x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq 0$  (1 pont), teljes négyzetté kiegészítve  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ , ami a  $(-1, 1)$  középpontú,  $\sqrt{2}$  sugarú körlap, a  $z = 0$  pont kivételével (2 pont).
- 5.** A feltételek szerint  $f(x) = (x-a)^6(x-b)^6g(x)$ , ahol  $a < b \in \mathbb{Z}$  és  $g$  is egész együtthatós (2 pont). Ha  $f(c) = 32$ , ahol  $c$  egész, akkor, mivel 32-ben nem szerepel prím a hatodik, vagy annál nagyobb hatványon,  $c - a$ -nak és  $c - b$ -nek sincs prímosztója, és így mindkettő  $\pm 1$  (2 pont). Mivel  $a < b$ , ez csak úgy lehet, hogy  $c = a + 1 = b - 1$ . Tehát legfeljebb egy darab  $c$  lehet (1 pont). Erre példa:  $f(x) = 32(x - 1)^6(x + 1)^6$ , ahol  $c = 0$  (1 pont).
- 6.** Ha  $o(\varepsilon) = n$ , akkor  $\varepsilon$  szöge  $360^\circ$ -nak  $k/n$ -szerese, ahol  $(k, n) = 1$  (1 pont). Ezért  $i\varepsilon$  szöge  $360^\circ$ -nak  $(k/n) + (1/4) = (4k + n)/(4n)$ -szerese (1 pont). Az kell, hogy ennek a törtnek a nevezője egyszerűsítés után  $2n$  legyen (1 pont). Így kettővel lehet egyszerűsíteni, azaz a számláló páros, tehát  $n$  páros. Mivel 4-gyel nem lehet egyszerűsíteni,  $n/2$  páratlan (1 pont). Páratlan  $p$  prímmel nem lehet egyszerűsíteni, mert ha  $p \mid 4n$ , akkor  $p \mid n$ , és ha  $p \mid 4k + n$  is teljesül, akkor  $p \mid 4k$ , azaz  $p \mid k$ , de ez ellentmond annak, hogy  $(k, n) = 1$  (1 pont). Vagyis  $n$  pontosan akkor felel meg a feladat feltételeinek, ha  $4m + 2$  alakú. Ezért például minden 50-edik primitív egységgyök megoldás (1 pont). *Megjegyzés:* Teljes értékű megoldásnak számít egy konkrét jó  $\varepsilon$  megadása, az  $o(\varepsilon)$  és az  $o(i\varepsilon)$  rendesen megindokolt kiszámításával együtt. Például ha  $\varepsilon = \cos 4^\circ + i \sin 4^\circ$ , akkor rendje 90, hiszen  $4/360 = 1/90$  és  $(1, 90) = 1$ . Ekkor  $i\varepsilon = \cos 94^\circ + i \sin 94^\circ$ , aminek rendje 180, hiszen  $94/360 = 47/180$ , és  $(47, 180) = 1$ .