*Mat. I. (BSc.)* **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2014. jan. 29.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

**I. rész (30 perc).** *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mikor egyenlőek a $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ polinomok?

Ha $a_i = b_i$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén.

2. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $f(x)$ polinomnak a $b$ szám **pontosan** $k$-szoros gyöke.

Van olyan $g(x)$ polinom, melyre $f(x) = (x-b)^k g(x)$, ahol $g(b) \neq 0$.

3. Mikor egyenlőek a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $s(\cos\beta + i\sin\beta)$ komplex számok?

Akkor és csak akkor, ha $r = s$ és $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ$ alkalmas $k$ egészre.

4. Jellemezzük a primitív $n$-edik egységgyököket a hatványaik halmazával.

$\varepsilon$ pontosan akkor primitív $n$-edik egységgyök, ha hatványai az összes $n$-edik egységgyökök.

5. Legyen $M = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{k\times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Írjuk föl az $MN$ szorzatmátrix $p$-edik sorának $q$-adik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

$\sum_{\ell=1}^{m} a_{p\ell} b_{\ell q} = a_{p1}b_{1q} + \ldots + a_{pm}b_{mq}$

6. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns harmadik oszlopa szerinti kifejtését. Az $i$-edik sor $j$-edik eleméhez tartozó, **már előjelezett** aldeterminánst jelölje $A_{ij}$.

$a_{13}A_{13} + \ldots + a_{n3}A_{n3} = \sum_{k=1}^{n} a_{k3}A_{k3}$

7. Jellemezzük egy négyzetes mátrix invertálhatóságát a determinánsa segítségével.

Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

8. Mondjuk ki az interpoláció egyértelműségéről szóló tételt (sem a létezésről, sem a konstrukcióról nem kell írni).

Ha $T$ test, $n \geq 0$ egész, és $a_1, \ldots, a_n \in T$ páronként különböző, továbbá $b_1, \ldots, b_n \in T$ tetszőleges, akkor a legfeljebb $n-1$-edfokú polinomok között (a nullapolinomot is beleértve) legfeljebb egy olyan $f \in T[x]$ van, melyre $f(a_i) = b_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

9. Definiáljuk a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomot a gyöktényezős alakja segítségével (tehát **nem** a rekurziós képletet kell felírni).

$\Phi_n(x) = (x - \eta_1) \ldots (x - \eta_k)$, ahol $\eta_1, \ldots, \eta_k$ az $n$-edik primitív egységgyökök ($k = \varphi(n)$).

10. Definiáljuk egy $R$ gyűrűben az $r$ elem ellentettjének fogalmát.

Az $r$ elem ellentettje $s$, ha $r + s = s + r = 0$.