NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $|z| = 1$, $|w| = 2$, $|z + w| = 3$ és $w/z = 2\varepsilon$, akkor mik ε szögének lehetséges értékei?

    csak 0°

12. Mennyi a $2i + 3$ komplex szám +45 fokos elforgatottja?

    $(1 + 5i)/\sqrt{2}$

13. Mennyi $(-1+i\sqrt{3})^{2014}$ értéke? (Algebrai alakban, a valós és képzetes rész is konkrét szám legyen, ne binomiális összeg.)

    $-2^{2013} + i2^{2013}\sqrt{3}$

14. Legyen $\varepsilon = \cos 342° + i \sin 342°$. Mennyi ε^{-2} rendje?

    10

15. Legyen $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ és $b \in \mathbb{R}^3$. Az $M\mathbf{x} = b$ lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációja során keletkezik csupa nulla sor. Mik a megoldások számának lehetséges értékei?

    0 vagy végtelen

16. Adjunk meg egy olyan $M \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mátrixot, ami nem nulla, nem az egységmátrix, de $M^2 = M$.

    Pl. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz értelmes az $AB + BB^T$ kifejezés?

    $n = k = m = \ell$

18. Mennyi $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}$ inverzében a második sor első eleme?

    -1

19. Adjunk meg egy olyan permutációt S_5-ben, amelyben 5 inverzió van.

    $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

20. Ha $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ és $\det(A) = 4$, akkor mit kapunk, ha A minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjelezett aldeterminánssal, és ezt a kilenc számot összeadjuk?

    12

21. Adjunk **konkrét** ellenpéldát az alábbi állításra: „Az $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ polinom foka n.”

Például $1 + x + 0 \cdot x^2$ foka 1, és nem 2. Itt $n = 2$ és $a_2 = 0$.

22. A negyedfokú, normált $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak legalább kétszeres gyöke az $1 + 9i$. Mi lehet az x^3 együtthatója?

csak -4

23. Mely $n \geq 0$ egészekre irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött $x^n + nx + 2$?

$n = 1, 2$

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha a $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$-re igaz, hogy $f \mid gh \Rightarrow f \mid g$ vagy $f \mid h$ minden $g, h \in \mathbb{Q}[x]$-re, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Pl. $f(x) = 1$.

25. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomokra, melyekre f osztója g-nek $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

$f(x) = 2x$ és $g(x) = x$.

26. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$-re, amely $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, $\mathbb{Z}$ fölött pedig hat irreducibilis polinom szorzata.

$32x$

27. Soroljuk föl $\mathbb{Z}_{12}$ nullosztóit.

2, 3, 4, 6, 8, 9, 10

28. Végezzük el az $x^3 + x^2 + 1 : 2x^2 + 1$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_5$ fölött.

$x^3 + x^2 + 1 = (2x^2 + 1)(3x + 3) + (2x + 3)$

29. Mennyi az $(x^3 + x + 1)^{25} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomban az x^{25} együtthatója?

1

30. Adjunk példát olyan kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti polinomra, melynek gyöke a 0 és a 2, de a megfelelő két gyöktényezőt **egyszerre** nem lehet kiemelni. A gyűrűt is meg kell adni.

Pl. $\mathbb{Z}_4$ fölött $2x$ $(= 2(x - 2))$.