Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2014. jan. 22.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk egy (egyváltozós) polinom fokának a fogalmát. Mely polinomoknak nincs foka?

   Az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ foka n, ha $a_n \neq 0$. A nullapolinomnak nincs foka.

2. Mondjuk ki a gyöktényezők **egyszerre** való kiemelhetőségéről szóló tételt (beleértve, hogy milyen tulajdonságú gyűrű fölött érvényes).

   Szokásos (azaz egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes**) R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ az f-nek az **összes** R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy az abszolút érték a komplex számok körében szorzattartó.

   $|zw| = |z|\,|w|$

4. Ha w_0 a $z \neq 0$ komplex szám egyik n-edik gyöke, akkor ebből hogyan kapható meg z többi n-edik gyöke?

   Úgy, hogy w_0-t megszorozzuk mindegyik n-edik egységgyökkel.

5. Mikor teljesül a z és w komplex számokra felírt háromszögegyenlőtlenségben **egyenlőség**? (A háromszögegyenlőtlenséget nem kell felírni.)

   Akkor és csak akkor, ha alkalmas $r \geq 0$ valós számra $z = rw$ vagy $w = rz$.

6. Definiáljuk az $((a_{ij}))$ mátrix a_{23} eleméhez tartozó **előjeles** aldeterminháns fogalmát.

Elhagyjuk a második sort és a harmadik oszlopot, kiszámoljuk a kapott mátrix determinánsát, az eredményt megszorozzuk $(-1)^{2+3} = -1$-gyel.

7. Mondjuk ki a permutációk előjelének szorzástételét.

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(f \circ g) = \mathrm{sg}(f)\,\mathrm{sg}(g)$

8. Írjuk föl azt a képletet, amivel az n-edfokú $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetében a gyökök σ_k elemi szimmetrikus polinomjának értéke az együtthatókból leolvasható.

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

9. Mondjuk ki az első Gauss-lemmát (nem a primitív polinomokról szóló következményét).

Ha $p \in \mathbb{Z}$ prím, akkor p a $\mathbb{Z}[x]$-ben is prím (konstans polinomként).

10. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomjainak leírását ($\mathbb{Q}[x]$-re való visszavezetéssel). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans $\mathbb{Z}$-beli prímszám, vagy pedig primitív és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis.