NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $(x-iy)^6 = 1-2i$, akkor mennyi lesz $(x+iy)^{12}$? Az x és az y valós számok.

    $-3+4i$

12. Mennyi $1+i$ és az origó körüli 60 fokos elforgatottjának a távolsága?

    $\sqrt{2}$

13. Soroljuk föl $(-1-i\sqrt{3})/2$ azon hatodik gyökeinek a szögeit, melyek rendje 18.

    $100°, 220°, 340°$.

14. Mennyi a harmadik primitív egységgyökök összege?

    -1

15. Tekintsük az $x+y=2$, $x-y=3$ lineáris egyenletrendszert. Írjuk föl azt a determinánst, amely a számlálóban szerepel, amikor x-et a Cramer-szabály alkalmazásával kiszámítjuk.

    $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

16. Legyen n az a legkisebb egész, melyre van olyan $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, melyek n eleme 0, a többi 1, és $M^2 = 0$. Mennyi n értéke? Adjunk meg egy megfelelő M mátrixot is.

    $n = 3$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz értelmes az $AB + B^T B$ kifejezés?

    $n = k$, $m = \ell$.

18. Mi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ inverze?

    $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

19. Hány inverzió van az $(1,3)\circ(2,4)$ kompozícióban?

    4

20. Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\det(A) = 2$, akkor mennyi $\det(3A^{-1})$?

    $3^n/2$

21. Legyen T test és $f \in T[x]$. A T fölötti gyöktényezős alak $f(x) = c(x - b_1)\dots(x - b_n)$ definíciójából kifelejtettük, hogy $b_i \in T$. Adjunk példapolinomot, amelynek e hiányos definíció szerint van gyöktényezős alakja, de a hibátlan definíció szerint nincs. A testet is meg kell adni.

Például $T = \mathbb{R}$ fölött $x^2 + 1$, amely $\mathbb{C}$ fölött $(x + i)(x - i)$, de $\pm i \notin \mathbb{R}$.

22. Hányszoros gyöke az $x^3 - 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomnak a 2?

3-szoros.

23. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ polinomra, melynek több gyöke van, mint a foka. A gyökeit is soroljuk föl.

Pl. $3x$ gyökei 0, 5, 10.

24. Írjuk föl azt a másodfokú polinomot $\mathbb{C}[x]$-ben, melyben a gyökök összege 2, szorzatuk 3, és a konstans tag 4.

$(4/3)x^2 - (8/3)x + 4$.

25. Mely $n \geq 0$ egészekre irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött $x^n - nx - 1$?

Nincs ilyen n.

26. Melyik a legnagyobb $n \geq 0$, melyre hamis a következő: „ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban”? Adjunk erre az n-re ellenpélda-polinomot.

$n = 1$, $f(x) = x$.

27. Adjunk negyedfokú ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy $\mathbb{Z}$ feletti polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor teljesül rá a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele.

Pl. $\Phi_8(x) = x^4 + 1$.

28. Hány irreducibilis osztója van $\mathbb{Z}[x]$-ben a $6x^2 - 6$ polinomnak? Az egységszereseket is külön számoljuk.

8

29. Soroljuk föl $\mathbb{Z}_{10}$ egységeit.

$1, 3, 7, 9$

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - 6x + 2$ polinomnak? Emlékeztetőül Cardano képlete:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

3 (mert $D = (2/2)^2 + (-6/3)^3 < 0$).