

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Ha  $(x - iy)^6 = 1 - 2i$ , akkor mennyi lesz  $(x + iy)^{12}$ ? Az  $x$  és az  $y$  valós számok.

12. Mennyi  $1 + i$  és az origó körüli 60 fokos elforgatottjának a távolsága?

13. Soroljuk föl  $(-1 - i\sqrt{3})/2$  azon hatodik gyökeinek a szögeit, melyek rendje 18.

14. Mennyi a harmadik primitív egységgyökök összege?

15. Tekintsük az  $x + y = 2$ ,  $x - y = 3$  lineáris egyenletrendszert. Írjuk föl azt a determinánst, amely a számlálóban szerepel, amikor  $x$ -et a Cramer-szabály alkalmazásával kiszámítjuk.

16. Legyen  $n$  az a legkisebb egész, melyre van olyan  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrix, melyek  $n$  eleme 0, a többi 1, és  $M^2 = 0$ . Mennyi  $n$  értéke? Adjunk meg egy megfelelő  $M$  mátrixot is.

17. Legyen  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  és  $B \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$ . Milyen feltétel mellett lesz értelmes az  $AB + B^T B$  kifejezés?

18. Mi  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$  inverze?

19. Hány inverzió van az  $(1, 3) \circ (2, 4)$  kompozícióban?

20. Ha  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  és  $\det(A) = 2$ , akkor mennyi  $\det(3A^{-1})$ ?

21. Legyen  $T$  test és  $f \in T[x]$ . A  $T$  fölötti gyöktényezős alak  $f(x) = c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  definíciójából kifejtettük, hogy  $b_i \in T$ . Adjunk példapolinomot, amelynek e hiányos definíció szerint van gyöktényezős alakja, de a hibátlan definíció szerint nincs. A testet is meg kell adni.

22. Hányszoros gyöke az  $x^3 - 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$  polinomnak a 2?

23. Adjunk példát olyan  $f \in \mathbb{Z}_{15}[x]$  polinomra, melynek több gyöke van, mint a foka. A gyökeit is soroljuk föl.

24. Írjuk föl azt a másodfokú polinomot  $\mathbb{C}[x]$ -ben, melyben a gyökök összege 2, szorzatuk 3, és a konstans tag 4.

25. Mely  $n \geq 0$  egészekre irreducibilis  $\mathbb{R}$  fölött  $x^n - nx - 1$ ?

26. Melyik a legnagyobb  $n \geq 0$ , melyre hamis a következő: „ha egy  $n$ -edfokú  $f \in \mathbb{Q}[x]$  irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött, akkor nincs gyöke  $\mathbb{Q}$ -ban”? Adjunk erre az  $n$ -re ellenpélda-polinomot.

27. Adjunk negyedfokú ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy  $\mathbb{Z}$  feletti polinom irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött, akkor teljesül rá a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele.

28. Hány irreducibilis osztója van  $\mathbb{Z}[x]$ -ben a  $6x^2 - 6$  polinomnak? Az egységsszereseket is külön számoljuk.

29. Soroljuk föl  $\mathbb{Z}_{10}$  egységeit.

30. Hány valós gyöke van az  $x^3 - 6x + 2$  polinomnak? Emlékeztetőül Cardano képlete:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$