Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2014. jan. 15.*

NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g nem nulla polinomok nem nulla összegének fokáról szóló állítást **abban az esetben, amikor** $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$.

   Ha $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$, akkor $\mathrm{gr}(f+g) = \max\big(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\big)$.

2. Mit jelent az, hogy egy polinomnak van gyöktényezős alakja egy T test fölött?

   Azt, hogy felírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol $c, b_1, \ldots, b_n \in T$.

3. Mikor egyenlőek a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $s(\cos\beta + i\sin\beta)$ komplex számok?

   Akkor és csak akkor, ha $r = s$ és $\beta - \alpha = k \cdot 360°$ alkalmas k egészre.

4. Definiáljuk a $0 \neq z \in \mathbb{C}$ szám rendjének fogalmát.

   A z rendje az egész kitevőjű, különböző hatványainak a száma.

5. Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{C}^{a\times b}$ és $N = ((n_{ij})) \in \mathbb{C}^{b\times c}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix u-adik sorának w-edik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

   $\sum_{\ell=1}^{b} m_{u\ell}n_{\ell w} = m_{u1}n_{1w} + \ldots + m_{ub}n_{bw}$

6. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha M és N is $n \times n$-es mátrix, akkor $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

7. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsát **definiáló** képletet (nem a kifejtési tételt!).

$\sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} \dots a_{nf(n)}$

8. Definiáljuk az n-változós σ_k elemi szimmetrikus polinomot (ami egy n-edfokú polinom gyökeinek és együtthatóinak összefüggésében szerepel). Hány tagja van ennek?

Az $x_1, \dots, x_n$ változók közül az összes lehetséges módon kiveszünk k darabot, ezeket összeszorozzuk, és a kapott $\binom{n}{k}$ tagot összeadjuk.

9. Mondjuk ki a második Gauss-lemmát.

Ha $0 \neq f \in \mathbb{Z}[x]$ és $f = gh$, ahol $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, akkor g és h megszorozható racionális számokkal úgy, hogy a kapott g_1 és h_1 polinomok egész együtthatósak legyenek, és $f = g_1 h_1$ teljesüljön.

10. Definiáljuk az R szokásos gyűrűben a felbonthatatlan elem fogalmát. Az egység, illetve a triviális felbontás fogalmát nem kell definiálni.

Az $r \in R$ felbonthatatlan, ha nem nulla, nem egység, és minden felbontása triviális.