Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2014. jan. 15.*

NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $(x+iy)^7 = 2-i$, akkor mennyi lesz $(x^2+y^2)^4$? Az x és az y valós számok.

    $\sqrt[7]{5^4}$

12. Soroljuk föl $1-i\sqrt{3}$ azon tizedik gyökeit, melyek a harmadik síknegyedbe esnek.

    $\sqrt[10]{2}(\cos 210° + i \sin 210°)$ és $\sqrt[10]{2}(\cos 246° + i \sin 246°)$.

13. Ha z huszadik primitív egységgyök, akkor mennyi $o(z^{-6})$?

    10

14. Melyik komplex számot kapjuk, ha $2z$-t z körül $+90$ fokkal elforgatjuk?

    $z + iz$

15. Írjunk föl egy olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek egyértelmű megoldása van, de a Cramer-szabály mégsem alkalmazható ennek kiszámítására.

    $x = 1$
    $x = 1$

16. Két százszor százas mátrix mindegyikének pontosan 9999 eleme nulla. Hány nem nulla eleme lehet a szorzatuknak?

    0 vagy 1.

17. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz értelmes az $AA^T + B$ kifejezés?

    $m = k = \ell$.

18. Az M mátrix első sorát $3i \in \mathbb{C}$-vel megszorozzuk. Hogyan változik az inverzében az első sor második eleme?

    Nem változik.

19. Maximum hány inverzió lehet S_7 egy transzpozíciójában? Adjunk is példát olyan transzpozícióra, amiben ennyi van.

    11 darab az $(1,7)$-ben.

20. Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\det(A) = 2$, akkor mennyi $\det(iA^3)$?

    $8i^n$

21. Adjunk ellenpéldát a következő állításra. Ha az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak az α komplex szám pontosan n-szeres gyöke, akkor $\overline{\alpha}$ is n-szeres gyöke f-nek.

Például $f(x) = x - i$.

22. Adjunk meg $\mathbb{Z}_3$ fölött egy olyan hetedfokú polinomot, melyhez tartozó polinomfügvény azonosan 1.

Pl. $1 + (x^3 - x)x^4$.

23. Adjunk példát (egy polinomot és egy gyűrűt), ami azt mutatja, hogy a gyöktényezők egyszerre való kiemelhetőségéről szóló állítás nem igaz, ha a nullosztómentességet nem tesszük föl.

Pl. $x^2 - 1$ a $\mathbb{Z}_8$ fölött.

24. Egy tizedfokú polinom gyöktényezős alakjában mind a tíz gyököt 2-vel megszorozzuk. Hogyan változik az x^7 együtthatója?

8-szorosára.

25. Legyen R szokásos gyűrű. Mit elegendő föltenni a $0 \neq g \in R[x]$ polinomról ahhoz, hogy az $f : g$ maradékos osztás biztosan elvégezhető legyen?

Azt, hogy g főegyütthatója invertálható.

26. Melyik a legkisebb $n > 0$, melyre hamis a következő: „ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{Q}[x]$-nek nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött"? Adjunk erre az n-re ellenpélda-polinomot.

$n = 4$, $(x^2 + 1)^2$.

27. Adjunk hetedfokú ellenpéldát az alábbira: ha egy $\mathbb{Z}$ feletti polinomra teljesül a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele akkor az irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

Pl. $3x^7 - 6$.

28. Mennyi az 31-edik körosztási polinom gyökeinek négyzetösszege?

$(-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$

29. Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_{24}$-ben?

$24 - \varphi(24) - 1 = 15$

30. Osszuk el maradékosan $x^4 + x^3 + 1$-et $2x^3 + 1$-gyel $\mathbb{Z}_3$ fölött.

Hányados $2x + 2$, maradék $x + 2$.