

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ és a $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k együtthatóját.

$$\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

2. Mondjuk ki a gyöktényezők **egyszerre** való kiemelhetőségéről szóló tételt (beleértve, hogy milyen tulajdonságú gyűrű fölött érvényes).

Szokásos (azaz egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes**) R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) b_1, \dots, b_k az f -nek az **összes** R -beli gyökei, és q -nak nincs gyöke R -ben.

3. Írjuk föl a a trigonometrikus alakú $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ és $s(\cos \beta + i \sin \beta)$ komplex számok szorzatát trigonometrikus alakban.

$$rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

4. Mondjuk ki a hatvány rendjének képletét.

$$o(z^n) = \frac{o(z)}{(o(z), n)}$$

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke \mathbb{C} -ben. **Vagy:** Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$ -beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Írjuk föl az $n \times n$ -es $((a_{ij}))$ determináns utolsó sora szerinti kifejtését. Az i -edik sor j -edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij} .

$$a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{nk}$$

7. Definiáljuk az $f, g \in S_n$ kompozíciójának fogalmát.

$$\text{Minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén } (f \circ g)(i) = f(g(i)).$$

8. Írjuk föl az a_1, \dots, a_n (páronként különböző) helyekhez tartozó $\ell_1(x)$ **első** Lagrange-féle interpolációs **al**polinomot.

$$\frac{(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}$$

9. Mondjuk ki a második Gauss-lemmát.

Ha $0 \neq f \in \mathbb{Z}[x]$ és $f = gh$, ahol $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, akkor g és h megszorozható racionális számokkal úgy, hogy a kapott g_1 és h_1 polinomok egész együtthatósak legyenek, és $f = g_1 h_1$ teljesüljön.

10. Definiáljuk az R gyűrűben az egységelem fogalmát. (Nem az egység fogalmát kell definiálni!)

Az $e \in R$ egységelem, ha minden $r \in R$ esetén $er = re = r$.