Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2014. jan. 8.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $|z| = 4$, akkor mennyi z és iz távolsága?

$4\sqrt{2}$

12. Soroljuk föl $1 + i$ azon hatodik gyökeit, melyek a harmadik síknegyedbe esnek.

$\sqrt[12]{2}(\cos 187,5^\circ + i \sin 187,5^\circ)$ és $\sqrt[12]{2}(\cos 247,5^\circ + i \sin 247,5^\circ)$.

13. Hányadik primitív egységgyök lesz $(-i - \sqrt{3})/2$?

12

14. Mely $n > 0$ egészekre igaz: „minden n rendű számnak hatványa az i”?

$4 \mid n$

15. Írjunk föl egy olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek van megoldása, ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen, de a Cramer-szabály mégsem alkalmazható.

$x + y = 1$
$x + y = 1$

16. Legyen $M = (1, 3)$ és $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mennyi NM?

$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

17. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz értelmes az $AB^T + A$ kifejezés?

$n = k = \ell$.

18. Az M mátrix minden elemét $3i \in \mathbb{C}$-vel megszorozzuk. Hogyan változik az inverze?

Szorzódik $-i/3$-mal.

19. Adjunk meg egy olyan permutációt S_5-ben, amelyben 7 inverzió van.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

20. A 4×4-es $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik sora egyenlő. Az $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$

21. Legalább hányadfokú kell, hogy legyen egy $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, melynek két racionális gyöke van, és legalább kétszeres gyöke az $2+i$? Adjunk is példát ilyen minimális fokú polinomra.

Legalább hatodfokú, pl. $x(x-1)(x-2-i)^2(x-2+i)^2$.

22. Adjunk példát két olyan polinomra, melyekhez tartozó polinomfüggvények egyenlők, de az egyiknek kétszeres, a másiknak háromszoros gyöke az 1. Az alaptestet is meg kell adni.

Pl. $(x-1)^2$ és $(x-1)^3$ a $\mathbb{Z}_2$ fölött.

23. Egy harmadfokú polinom gyökeinek mindhárom elemi szimmetrikus kifejezése 1. Határozzuk meg a polinom gyökeit.

$1,\ i,\ -i$.

24. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomokra, melyeket $\mathbb{Q}[x]$-ben maradékosan elosztva a maradék $x + (1/2)$ lesz.

Pl. $f(x) = x^2 + x + 1$ és $g(x) = 2x^2 + 1$.

25. Melyik a legkisebb $n \geq 0$, melyre hamis a következő: „ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor irreducibilis $\mathbb{C}$ fölött is”? Adjunk erre az n-re ellenpélda-polinomot is.

$n = 2,\ x^2 + 1$.

26. Adjunk meg egy hetedfokú $\mathbb{Q}$ fölötti polinomot, mely reducibilis, de nincs racionális gyöke.

Pl. $(x^3 - 2)(x^4 - 2)$.

27. Legyen $f(x) = (1/14)x^7 + (2/7)x + 1$. Hogyan alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium annak megmutatására, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?

$14f(x)$-re alkalmazható $p = 2$-vel, mert $f(x)$ irreducubilis $\Leftrightarrow$ $14f(x)$ az.

28. Mik azon egész együtthatós polinomok fokainak lehetséges értékei, melyek $\mathbb{Z}$ felett irreducibilisek, de $\mathbb{Q}$ felett nem?

Csak nulladfokú lehet.

29. Adjunk példát arra, hogy két nullosztó összege nem nullosztó (a gyűrűt is meg kell adni).

$2, 3 \in \mathbb{Z}_6$ vagy $2, 2 \in \mathbb{Z}_4$

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_5$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^5 - x$ polinomot.

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$