Bsc algebra1 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2013. december 2–4)

1. ***(3.9.4, 3.9.11)*** Számítsuk ki Φ_{12}-t és a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

2. ***(1.1.8, 1.1.9)*** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2 : 3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

3. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

4. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.

5. ***(3.5.9)*** Az $x^4 + x^2 + x + 1$-et $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Gyakorló feladatok

6. ***(3.9.18)*** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával a 12-edik, a 18-adik illetve a 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

7. ***(3.9.12)*** Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

8. ***(3.9.15*)*** Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

9. ***(3.9.16)*** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$-et, ha $n = 36, 72, 144, 100$.

---

10. Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_4$-ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$-ben?

11. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $(3x + 1)f(x)$ foka 2.

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}_6$ fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.

13. Hány olyan legföljebb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, mely minden helyen 1?

14. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött gyöktényezős alakra az $x^8 + 1$ polinomot.

15. Végezzük el az $(x^6 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_2$ fölött.

16. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + x^5 + x^2 + 1$ polinomot.

---

17. ***(2.2.35)*** Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?

(1) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(2) $\mathbb{G} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*).
(3) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(4) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(5) A páratlan, illetve a 2-hatvány nevezőjű törtek $\mathbb{Q}$ műveleteire nézve.
(6) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

18. ***(2.2.4, 2.2.7)*** Igazoljuk, hogy a kompozíció asszociatív. Mi az egységelem? Adjunk példát két geometriai transzformációra, ami mutatja, hogy a kompozíció nem kommutatív.

19. ***(2.2.20)*** Igazoljuk az $a^m a^n = a^{m+n}$ és az $(a^m)^n = a^{mn}$ azonosságokat tetszőleges egységelemes gyűrű a invertálható elemére (m és n egészek, de lehetnek negatívak is).

20. ***(2.2.32)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztókat és az invertálható elemeket.